數學百子櫃系列（十四）

數學教師不怕被學生難倒了！

——中小學數學教師所需的數學知識

主編　　：　黃毅英

副主編　：　張僑平

作者　　：　許世紅

（按筆劃序）　張家麟

陳鎮民

黃麗珍

蔡勁航

謝明初

蘇洪雨

教育局

課程發展處數學教育組

ISBN 978-988-8159-11-6

目錄

前言

爲配合香港數學教育的發展，並向教師提供更多的參考資料，課程發展處數學教育組於 2007 年開始邀請大學學者及資深教師撰寫專文，以及蒐集和整理講座資料，輯錄成《數學百子櫃系列》。本書《數學教師不怕被學生難倒了！——中小學數學教師所需的數學知識》，是這個系列的第十四冊。

本書主編黃毅英教授及各位作者，都是香港或內地資深的數學教育同工，對學科知識和學科內容知識都有精闢的見解。他們在書中以數學觀點，探討日常課堂上的數學學科知識問題，深入淺出，讀者定必大受裨益。

本書得以順利出版，實在是各方教育工作者共同努力的成果。在此，謹向各位學者、教師，以及所有爲本書勞心勞力的朋友，致以衷心的感謝。

最後必須要多謝黃毅英教授及各位作者，慷慨准許教育局在本港出版此書的繁體字版本，讓更多讀者能從中獲益。

如對本書有任何意見或建議，歡迎以郵寄、電話、傳真或電郵方式聯絡教育局課程發展處數學教育組：

九龍油麻地彌敦道 405 號九龍政府合署 4 樓
教育局課程發展處
總課程發展主任（數學）收
(傳真：3426 9265 電郵：ccdoma@edb.gov.hk)

教育局課程發展處
數學教育組

序一

目前，數學教師所需要的知識問題，已經成爲各國教師教育研究和教師培訓工作者關心與討論的熱點。在過去的30年，對教學所需的知識的關注不斷增加，有人的關心源自感覺，也有人的關心隨着課程改革而變化。課改的進展對教師的要求與日俱增。各國教師感受的壓力千差萬別，然而，如何界定數學教學所需要的知識，是普遍感到關切的問題。數學教師應該知道甚麼，他們知道了甚麼，甚麼知識是可靠的，這些知識是否可以度量？如何度量？數學教師如何獲得知識，在甚麼時候獲得知識，在哪裡獲得並且鞏固這些知識？都是當前數學教師職業教育令人感興趣的問題。

1. 數學教育界關注的熱點問題

近年來，國際上已經成立了許多國際社團，專門研究數學教師爲教學而必須具備的知識。2008 年，在墨西哥召開的國際數學教育大會（ICME11）上，成立了研究“教師所需的數學知識”的專門小組。教師的數學知識以及作爲數學職業工作者的知識，兩者有相似之處，也有重要差別。差別何在？既在於知識量不同，也在於知識領域不同。差異不僅表現爲數學知識的性質，也表現爲它的使用功能，人們對兩者之間的差異正在研討中。

一些研究以試驗數據爲基礎，另一些研究對教師的數學知識作了理論思考，從而提供了數學教師教育的新想法。研究挑戰了現行數學教師教育：一些大學的數學教師教育強調學術型的數學訓練，與數學教學實踐缺乏聯繫。然而，加拿大魁北克雙語區的數學教師教育令人感到興奮，那兒有數學教師知識研

究的實體，教師教育工作者在其中發揮主要作用。

利用教師合作研究的課例，可以更好地理解教師在數學教學中，在學習情境中所需要的知識。研究源於19世紀70年代，加拿大蒙特利爾大學頒佈了中學數學教師教育大綱，提出了數學教師爲教學的數學知識的觀點，指出教師的知識由兩個相互補充的主軸構成：

(1) 從理論上說明數學教師在其數學教學中所需要的知識；
(2) 從教師的專業發展的角度對數學教學知識的結構成分和特點作出說明。

這個大綱雖然幾經修改，但是一直指導着數學教師的職業發展。

2. 數學教學知識的四維結構

文中所提供的教學課例，是由合作研究中心提出的，有關學生在探索數學問題的一些片段，通過分析學生數學學習的一些過程，說明教師爲數學教學所需要的知識，它們的成分，結構以及特徵。

數學活動的關鍵因素是教師對活動的設計，它是教學計劃的核心。在教學設計中，教師要調用四個維度的知識，即：

(1) 教學規定的維度：教學大綱，課程標準，相應的教材和教學參考書，以及這些文獻所涉及的知識。
(2) 教學目標的維度：對活動目標的分析，關心它能夠推動甚麼，思考學生在活動中應該得到哪些方面的發展。
(3) 數學的維度：與活動相關的數學知識，需要進行數學推理，推理中所用的概念、定理與性質，推理的數學表述，數學活動過程的記錄。

(4) 教學法的維度：與他人一起學習，在數學活動中，班級和小組構成小社會，師生交流，相互爭論，教學相長。

爲了教學的需要，教師要從多方面考慮和設計數學活動，需要把各種各樣的知識與能力有機結合起來，從而說明教師數學教學知識的多樣性與綜合性。作爲數學教師，應該具有良好的數學功底，教師對課程中相關的數學內容要有較深入的認識，較廣闊的學科視野，這是十分重要的。

3. 數學教學知識的實踐性與綜合性

教師的教學處理不能預先設定，而要根據學習活動的過程“見機行事”，比較各組學生的情況，研究在數學活動中出現的問題，有針對性地進行。

這種“見機行事”涉及教師教學的重要方面，這就意味着，教師通過設計適當的問題，讓學生鑒別他們的解答。這裡也隱含師生交流各自數學視角以及解決問題的方法。

數學教師的教學知識，主要是在教學中產生，並在教學中得到檢驗和強化。在教學中所用到的知識，往往不局限於某個章節的知識，而與數學其他分支，其他學科的知識綜合交織在一起。在教學中所用到的知識，也不局限於數學內容的知識，還包括動手實踐，探索發現，從簡單到複雜，從特殊到一般等科學認識論和方法論的原理。

數學教學的知識，它的產生具有突發性，它的運用具有機敏性。教師數學教學的知識有三個基本特點：

(1) 它的性質，接近於在行動中的知識，它的“見機行事”更甚於在傳授與閱讀中產生的知識。

(2) 它的情境特點，它與課堂出現的問題，以及解決問題的思

路緊密相連。

(3) 學生問題的出現具有不可預知性。新課程要求教師能及時跟蹤學生的想法，要根據各種具體情境，恰當地引導學生走出認知誤區，爲此教師必須有較高的知識水平與較強的引領能力。

數學教師在他們的教學中所遇到的情境，在方法上與數學家大不相同。在對問題的探索中，數學家肯定把注意力集中在建立數學模型上，尋找一般的公式，提出正確的解法，關注結論合理性的檢驗，結論推廣與引申。有時又要規定各種各樣的約束條件，研究問題解決的其它途徑。而教師在實際教學中處理有關數學問題時，就會從不同的視角進入。他們會聯繫到學生，聯繫到學生各種各樣的策略，聯繫到自然產生的模型，教師會根據這個模型，對問題及其各種解法進行再思考。教師也會對學生自然產生的各種思路，他們所陳述的道理，這些理由的有效性，以及他們所取得的進步產生興趣。

數學教學知識總是在教與學的線索中得以建立，得到解釋。設計教學情境，同時用到了各種各樣的知識來源，包括教育的，教學法的，數學的，甚至是規定性的。這些維度不是一成不變的。

數學思想方法的滲透是潛移默化的，關鍵是對學生情況的理解。課堂中的數學情境，總是把求解和探索結合在一起，各種因素綜合交織。各種因素不會單獨起作用，它們總是相互影響，相互選擇，聯袂演出。

在上述教學實踐中所需要的知識，即使稱之爲教師的爲教學的數學知識，也永遠不是純數學知識。它是各種知識的交織與組合，是非常特殊的知識。

4.　數學教師傳道解惑的良師益友

由黃毅英教授主編的新作《數學教師不怕被學生難倒了》是由中國內地與香港多位資深教師聯合撰寫的。

強大的作者陣容，豐富的教學研究閱歷，對師生所疑所惑的深入洞察，對課程相關問題的遠見卓識，是《數學教師不怕被學生難倒了》一書魅力之所在。

該書的出版，能夠配合中小學數學課程發展，適應教師職業發展的需要，幫助教師們較深入地探討數學課程的一些重要的數學問題。我以爲《數學教師不怕被學生難倒了》一書的吸引力在於如下幾方面。

（1）有助於加深對課程中有關數學問題的認識

《數學教師不怕被學生難倒了》一書圍繞着中小學數學課程的主幹內容展開，對一些重點問題作了較深入的闡述。例如：數系及其運算的發展問題，代數符號及其相關運算問題，對幾何圖形及其相互關係的認識問題，實驗幾何與演繹幾何問題，度量問題，統計與概率問題，既是課程的重點問題，也是教師們感到疑惑的問題。《數學教師不怕被學生難倒了》對這些問題一一作了詳細的分析與論述。

爲了減輕學生的學習負擔，考慮到知識的連貫性與銜接性，我國在課程的安排中，在教材的編寫中，對某些問題作了簡化。例如有關“數系的擴展”問題，在我國高中課程標準只安排了四個課時，因而在教學中無法詳細交待數系的來龍去脈，而《數學教師不怕被學生難倒了》一書，就能從歷史的角度，用數學結構的眼光，對此作了深入的說明。

（2）能夠幫助教師開闊數學課程的視野

我國中小學數學課程加進了不少新內容，如概率、統計、向量、導數及其應用等。爲了騰出時間學習課程的一系列新專題和新內容，我國簡化了對演繹推理的要求，因而也給教師帶來一些壓力。爲了解決教師對這些問題的疑惑，《數學教師不怕被學生難倒了》一書對與之相關的內容進行了深化與補充，它結合教材而高於教材，是教師教學研究的良師益友。《數學教師不怕被學生難倒了》一書採取了先統計，後概率的處理方法，恰與新課程的處理順序相一致。

《數學教師不怕被學生難倒了》一書，對於現實生活所需要的統計原理與方法，作了較詳細的介紹，有助於教師更好地把握教材。對於概率，書中補充了概率的緣起，說明了概率產生的歷史背景等。與課程相關的概率問題，如古典概型、幾何概型、概率的統計定義等，都是教師們希望瞭解的，《數學教師不怕被學生難倒了》一書對此作了較深入的探討，從而幫助教師開闊了課程的數學視野。

（3）爲數學教與學提供豐富的營養

某些重要的數學問題，新課程的處理方法與傳統的方法不同。以幾何爲例，新課程提倡探索與實驗，對於推理與論證降低了要求，如果處理不好，就會導致學生的推理與論證能力的削弱，爲了補充師生這方面的不足，《數學教師不怕被學生難倒了》一書設立了第三章“圖形與空間”，詳細闡明了它們之間的聯繫與區別，從而使他們能夠正確把握各年級圖形與空間能力有關的教學問題的深廣度。

《數學教師不怕被學生難倒了》一書，還提供了豐富的史

料與個案，讓教師們有機會欣賞數學的來龍去脈，攬勝數學史中的重大事件，具有良好的閱讀價值。

圖文並茂也是本書的一大亮點，這裡的圖，包括了精巧的幾何圖形，準確有價值的圖表，反映數學內在聯繫的邏輯框圖，既能展示數形結合的魅力，也給讀者以數學美的感受。這裡的“文”，是指案例，反映了教師在教學實踐中的疑惑，編者力求給予正確的回答。

（4）利於加強課程的薄弱環節

測量是中小學數學的重要組成部分，也是數學應用的一個主要方面。不少發達國家，如美，英，法，德，日等國，都把測量視爲課程必不可少的組成部分，在教材中編有關測量的專門章節，各國大綱對測量提出了明確的教學要求。在我國中小學，數學課程也含有與測量相關的內容，但是在教學上是把測量分散到各章節學習。

有些學校在教學中往往用代數計算和幾何原理等，掩蓋了其中的測量問題。例如，測量單位的選定，測量的轉換與變通，近似計算的方法與要求等。對這些重要的問題，尚缺乏專門的闡述，而相關的練習也有片面性。當前我國學生的計算能力不盡如人意，在數學練習中，使用測量單位有誤，對於測量的近似運算要求認識不清，因而錯誤百出。這也與對測量的處理支離破碎有關。

《數學教師不怕被學生難倒了》一書順應了國際數學課程改革的潮流，較爲完整的闡明了“測量”的意義、原理和方法。該書設置了度量的章節，對於度量的意義，過程，應用與誤差處理等問題作了較完整的論述，這有助於完善教師們的認知結

構，幫助教師正確處理測量的教學問題，對於糾正學生的常見錯誤，將會大有裨益。

筆者相信，本書對數學課堂教學，對教師的職業素養的提高，對於提高教師的教學水平，將大有幫助。它有助於建構知識在教學中的切入點，有助於指導教師在教學中具體處理。這些知識通過其他活動得以發展和提煉，對學生發揮引領作用。這是近來研究教師教育實踐的新線索，也是教師職業發展的新趨勢。教師的感悟在實踐中生成，它是動態發展的知識，它既相對獨立於實踐，又在實踐中逐步形成其意義。

王林全
於華南師範大學

序二

在與數學教師交流的時候，經常被問到類似這樣的問題：“爲甚麼規定 1 既不是質數，又不是合數”，“怎樣理解除以一個分數就是乘以這個分數的倒數”，“爲甚麼要先乘除後加減”，“交換律也適用於減法嗎”，這些看似簡單的問題，但從數學的角度理解，並在數學教育中合理地解釋給學生聽，並不是一件容易的事情。

中小學數學教師需要有數學專業知識，也需要有教育學知識。但並不是簡單地把數學知識與教育學知識相加就是數學教育知識。也不是大學的高等數學學得越多，數學學科知識越深，就可以完成好的數學教育。中小學數學知識往往看起來簡單，但其中蘊含着高深的數學專業知識。許多問題往往不是簡單地用高等數學知識就可以解釋的。因此，解決中小學數學教師在教育實踐中遇到的數學問題，嚴格說是數學教育的問題，需要將看似簡單的問題，用相關的數學原理解釋，尋找這些問題的數學之源。在此基礎上，將其變爲學生可以理解的教學知識運用於教學實踐。這可能是教師專業發展過程中的一個重要問題。也可能是對舒曼（Shulman）所說的學科教學知識（PCK）的一種合理的詮釋。

由香港中文大學黃毅英教授主編的《數學教師不怕被學生難倒了》一書，正是基於這樣一種教育實踐的需求，爲中小學教師解決教學實踐中遇到的數學問題，或者說是數學教學問題，從數學的角度追根溯源，給出詳細的解釋。對於中小學數學教師把握數學課程與教學中的具體問題，合理地進行課程與教學設計具有重要意義。

本書具有現實性、系統性和實用性等特點。闡述的問題多是從中小學教師的教學實踐中遇到的問題出發，從數學的角度加以梳理解釋，具有非常強的現實性和針對性。如，“爲甚麼$\frac{4}{5}$是‘4除以5’？”、“$\frac{4\times2}{4\times3}=\frac{8}{12}$等於$\frac{2}{3}$嗎？爲甚麼？”書中詳細地、圖文並茂地給出數學解釋以及教學建議。書中將這些問題從數與運算、代數、圖形的認識、實驗幾何和演繹幾何、測量、統計、概率等七個領域，進行了較爲系統的整理，涵蓋了中小學數學的全部內容，有利於教師在實際教學中運用，體現了設計安排的系統性。這些問題既有數學的體系和呈現的順序，同時每一個問題的敘述也是相對獨立的，教師完全可以根據需要選取某一個問題，或某一組問題學習和運用，體現了很強的實用性。

本書主編黃毅英教授多年從事數學教育領域的教學和研究，既有深厚的數學功底，又是數學教育的權威。黃教授和本書的其他作者爲中小學老師奉獻的這樣一本極富應用價值的著作，對提高中小學數學教師的專業素養，解決數學教師教育實踐中遇到的問題，進而提高數學教育質量必將發揮重要的作用。相信這本書將成爲中小學數學教師的良師益友。

馬雲鵬

於東北師範大學

序三

在師範大學數學系教了一輩子的書，所授課程包括《數學分析》、《函數論》和《中學數學教學法》。回顧往事，耳邊時不時地會響起如下的三方對話。

甲（師範生）：師範生學那麼多的高等數學幹甚麼？中學裡根本用不上！

乙（高等數學教授）：要給學生一杯水，教師必須有一桶水。居高才能臨下嘛！

丙（教育學教授）：學習的主體是學生，教師高高在上"給"學生注水，不符合建構主義理論。

乙：　依此推論，教師本身有沒有水、有多少水都沒有關係，與學生一起合作去打井取水豈不更好？

丙：　我們就是要反對"學科中心主義"。不過，我們不反對把教育學和數學結合在一起，讓師範生具備必要的數學專業教學知識。

甲：　數學教師當然要有數學知識，關鍵是要對中學數學教學有用的知識。居高未必能臨下。

乙：　不管怎麼說，數學教師作爲一位專業人士，數學素養是一切的基礎，教育學是必備的手段，居高臨下則是大家努力需要解決的問題。

對話內容豐富，這裡只是幾句引言。

今天剛剛打開電腦，黃毅英教授和他合作者的新著發在我的郵箱裡。打開一看，屏幕上顯示的數學文本，再次觸動了上述三方對話的心弦。

記得 2000 年在北京師範大學召開一次討論會上，前復旦

大學校長、楊福家院士曾問:“綜合大學和師範大學同樣教《理論物理》,師範大學有甚麼不同呢?”後來似乎也沒有明確的答案。我經過思考,給出的回答是:“師範大學所有課程的教學,都應該善於把各種知識的學術形態轉變爲學生易於接受的教育形態。高等數學課程、初等數學課程,以及教育類課程,概莫能外。”

我想,黃毅英等編著的這本書,就是一次將數學的學術形態轉化爲教育形態的一次嘗試。

關於高等數學、教育學和初等數學的關係,我曾經有一個比喻。這裡有兩座山頭,高的是高等數學,低的是初等數學。數學教師的任務是帶領學生登上初等數學的山頭。教育學是攀登初等數學山峰的人造階梯。如果不爬那個高等數學的山頭,當然也能慢慢地爬上那個初等數學的山頭。那麼,爲甚麼要費力地攀上高等數學的山頭呢?理由有三。一是教師需要證明自己有攀登高峰的能力,爲學生們做出榜樣。二是能做到“一覽眾山小”,有寬闊的視野。三是具有攀登高峰的經驗,可以應付各種困難險阻。所以說,學習高等數學是必須的,不可少的。

不過,初等數學畢竟有自己的特點。中學數學裡常常有許多說不清道不明的問題產生,需要研究解決。在將數學的學術形態轉化爲教育形態時,需要教育學的幫助,更需要高等數學的修養。因此,架起高等數學和初等數學兩座山峰之間的橋樑,就是一樁不可缺少的工程。

晚近以來,數學教育改革崇尚理念的改革,多半走“一般教育學理論 + 數學例子”的路子。對於數學本身的修養則有所忽視。數學教師的進修內容,缺乏數學內容。數學教師的晉升,只問公開課上的表演,不關注數學內容的把握。可以說出

現了某種“去數學化”的傾向。因此，從現代數學發展的高度審視中小學數學課程，注重數學本質，研究教學內容知識，成爲當務之急。數學教育研究的一個主要任務就是爲了架橋。國外盛行的“教學內容知識（PCK）”研究，“數學教學知識（MKT）”研究，都屬於這一類。本書的撰寫的意圖，大概就是想提請數學教師關注數學知識本身，提高自身的數學素養，力求高屋建瓴，居高臨下。

架起高等數學和初等數學之間的橋樑，許多數學前輩做過努力。例如 F·克萊因編著的《高觀點下的初等數學》就是這方面的經典。不過，許多中小學數學教師覺得這些著作還是難以消化，不能比較直接地解決教學中出現的問題。現在，黃毅英等編著的這一本著作，則在向數學的深度和廣度進軍的同時，更注意貼近教學實際，特別是正面回答了許多一線教師提出的問題，如爲甚麼“負負得正”？ $0.999\cdots = 1$？等一大批數學問題。這一特色，顯示了本書的實用價值。

不過，把中學數學內容的學術形態轉爲教師容易掌握、學生容易接受的教育形態，是一個長期的過程，不可能一蹴而就，畢其功於一役。黃毅英和他的合作者在這個方向上走了堅實的一步，將來還會要繼續走下去。

毅英教授是我多年的老朋友。他以學貫中西、紮根香港本土、接近民眾、勤寫多產聞名。我向他學習過許多。多年來，他關注中國內地數學教育，尤其是培養了一批博士，做出了特定的貢獻。他的新著出版，理應致賀。於是拉雜地寫了以上的感想，權作爲序。

張奠宙

於華東師大數學教育研究所

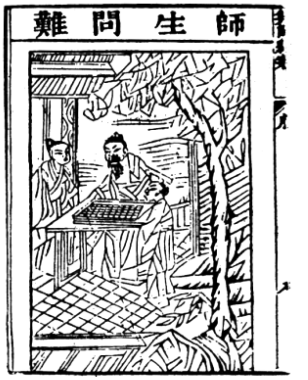
編者序

眾所周知，數學教師是教授數學的，理所當然他們必須要有雄厚的數學知識才能成爲稱職的教師。傳統上，數學教師出身數學系（或在師範大學中先修讀相當份量的數學），然後再學點教學法，大體出現了“數學教育＝數學＋教育學”的狀況，除了兩者未必一時能夠融會之外，一線教師往往會有這麼一種疑問：在大學裏學了實變函數、複分析、線性空間等一大堆數學知識，在日常教學中（尤以小學數學教師）卻根本無用武之地。

大學數學和中小學的學校數學之間的結合並是一蹴而就，數學家克萊因（Felix Klein）就曾指出：“大學新生入學一開始就發現，他面對的數學問題好像跟中學裏學過的東西一點也沒有聯繫，自然就很快便完全忘記了中學裏學過的東西。畢業後他當上了教師，突然發覺自己被要求依循老套的方法講授傳統的初等數學。由於缺乏別人的指導，他難以辨明當前的數學內容和他曾學到的高等數學有甚麼聯繫，於是他很快便接受了這套由來已久的教學方式。他的大學教育頂多成爲一種愉快回憶，對他的教學顯得毫無影響。”事實上，在大學學習的這些高等數學除了能令未來的數學教師們熟悉一些數學思維和習慣外，對以後在教學中解答學生問題也會起着關鍵性的作用。

在過往的學校教育中，教師比較權威，他每每只需將數學知識傳授給學生就夠了。例如，0 次冪的問題，若 $a \neq 0$，則 $a^0 = 1$ 就是了。不過學生會問：爲甚麼要把 a^0 定義成 1，有沒有其他的可能？這樣定義又有甚麼好處？這樣的問題是十分正常，亦是值得鼓勵的。

除了“傳道、授業”，教師還有一項重要的職能就是“解惑”。要回答教學中的這些問題，便需要動用深厚的數學知識，需要教師對數學的知識結構和本質有通盤的瞭解，包括高等數學知識。故此，學校數學和高等數學從來不是割裂的，中小學的數學教師就是需要能夠從高觀點來透視數學教學。



明・程大位
《算法統宗》
師生問難圖

這不只是牽涉中學範圍，簡單如“先乘除後加減”和“負負得正”兩個常見問題的本質，是有所差別的。前者只屬於習慣（約定俗成），後者就牽涉到兩個代數運算“＋”和“×”的代數結構。由於加法形成一個可交換群，而乘法是一個域。0本身是加法的一個單位，卻又是乘法中的一個零化子（零元）。“負負得正”是可以推論出來的。

現時一般給數學老師寫的數學書，較多從數學知識本身出發，例如介紹代數結構、微積分等，教師不容易把這些數學融入到日常教學中。本書的特色是從課程出發，展示其中涉及的數學內容，同時爲讀者整理出中小學數學學習內容的幾條主線。

例如，在數範疇，我們其實可以發現一條知識習得的進程。學生由接觸身邊的事物開始有了“量”與“序”的感覺，於是由數數等活動開始認識數字。數字本身就是一種頗抽象的概念。漸漸地，由數字的不同運算開始一步步擴展對數的認識。及至有理數時，單一的一個數開始可以有不同的表達方式（如分

數、小數、百分數等），於是學生便要學會在不同表達方式之間轉換。這中間穿插着數系的擴展，而且它還包含了各種運算定義的推廣。例如，從整數的加法到分數的加法，其中涉及運算法則上的推廣，也包括了原來的加法方式不變。從自然數到整數，再到有理數，涉及數學體系的擴展和代數結構的一層層豐富——從群到環，再到域。然而，從有理數系到實數就不太容易了，數學上的三次數學危機都或多或少地與實數的本質有關。古希臘人就是通過數軸去代表實數，亦即所謂數字的幾何化（geometrisation）。由實數再擴展到複數，也是數學教師需要知道的一項內容，例如我們要知道如果不用 i 而用 $-i$ 把 **R** 擴展，所得出的兩個 **C** 是否一樣呢？

從數字變到代數，涉及“文字”的替代。例如字母“x”，其實有不同層面的意義。它既可以是較靜態的“未知數”，也可以是“變量”。符號的運算法則，大多與數字類似，但有時也有所不同。例如，“$(3x+3)^2$ 與 $\left(\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{2}\right)$ 的公因式究竟是 $(x+1)$ 還是 $\frac{1}{2}(x+1)$，還是 $3(x+1)$ ？”就是常見的學生問題。我們若懂得 $\mathbf{R}[x]$，$\mathbf{Z}[x]$ 及 $\mathbf{Q}[x]$ 的性質，這些問題的答案就能一清二楚了。

代數範疇還涉及到方程的解、代數式、函數方程、不等式以及不等式的解集，這些是互相聯繫的學習進程。如果教師不注意這一點，學生就好像只是零碎地學會了一大堆數學工具而已。此外，函數又可以引出數列，而數列又可以爲將來學習微積分奠定基礎。

雖然現在幾何有不同的體系，如歐氏幾何、坐標幾何等，但總的來說，學生仍然是（在小學階段）從形式圖形出發，最

初是憑感觀（如視覺）認識圖形，慢慢地進行比較有系統的分辨圖形（如圖形的分類等），到初中階段就開始轉移到圖形的性質，從而進入到學習嚴格的定義和圖形的確定性（例如，三條邊長（SSS）就足以確定一個三角形）。有了定義和性質就可以進行幾何推理，這時的幾何學習就百花齊放了：一方面可以進入其他的幾何體系如坐標幾何，向量，甚至複數的“阿根圖”（Argand Diagram）等，另一方面又可進入三角學或是立體幾何方向，教師胸中有了這些數學知識結構，授課時就能做到條理分明，也能應對學生的常見問題。

數學知識的另一個主軸就是測量。這其實是數學與現實世界的銜接之一。諸如貨幣、時間、溫度、長度、面積和體積等都屬於現實世界的概念，轉換到數學，中間就有很多問題要清楚。例如，爲甚麼面積是兩個長度的乘積，單位和單位能否相乘（$cm \times cm = cm^2$ 嗎？），圓的面積爲甚麼與直徑平方成正比，不用微積分能否計算出球體的體積等等。要能回答這些問題，也是需要對數學內容知識有充分的掌握才行的。

最後當然是概率和統計了，人們常常把兩者放在一起討論。它們之間究竟有哪些關係呢？概率的計算往往需要利用以往收集到的統計資料，但如果我們真的要給學生呈現一條由具體到抽象、由日常事物到數學對象的數學化過程，統計就不見得一定要是概率的先導概念，反過來概率也未必是統計的先導概念。

除了上述幾條學校數學知識的主線，我們還不能忽視數學發展歷史的脈絡。這些脈絡不只是像歷史故事那麼簡單（如二次、三次、四次及五次方程解的有趣故事），我們還可以讓學生看到當時人們花費大量的精力創建數學究竟是要解決甚麼

樣的問題。不少的學者早就提出，個體（學生）學習數學的歷程與人類發展數學的過程是相類似的，即所謂“重鑄理論”。因此，數學教師“武裝”自己的一個重要因素就是數學的歷史發展脈絡。

近些年，由於電郵通訊的發達，筆者會不斷收到一些一線教師的詢問，郵件如雪片飛來。它們都是關乎學生的實際提問，而教師們一時無法回答。本書將它們作爲案例引用進來，放在適當的位置進行剖析，以彰顯運用數學知識去解答這些學生常見提問的必要性。這亦是本書與其它一些類似書籍的不同之處。我們從學生的實際問題出發，以數學課堂的設計和課程的安排作爲藍本，於其中引出數學教師所需要知道的數學知識，在讀者感到內容實在之餘，更希望能對他們的教學有實質性的幫助。

本書撰寫分工如下：謝明初：第一章數及其運算；陳鎮民：第二章代數；蘇洪雨：第三章圖形與空間；張僑平：第四章測量；許世紅：第五章統計與概率。此外，黃麗珍做了不少前期的工作，張家麟、蔡勁航兩位在稿成後通讀了全書，尤其核對了相關的數學內容。

本書的寫作，需要鳴謝美國加州伯克利大學伍鴻熙教授同意我們採用其書籍中的部分案例，同時也感謝黃民建先生辛勤的圖文處理及黃潔女士的仔細校閱。更感榮幸的是得到中國數學教育界的三位巨人，王林全教授、馬雲鵬教授及張奠宙教授（仍以筆劃編排）賜序令本書生色不少。謹此致謝。

第一章　數及其運算

無論是人類的祖先還是當代小孩，最初接觸數學恐怕都是從數字開始。除了數數，再就是有關它們的運算了。隨着數字的發展，它們逐漸蘊含了不同種類的數字，如整數、有理數等，數字亦開始從現實生活的對象漸變成“人造物”。那麼，它們的數學本質是甚麼呢？本章將首先介紹數系的擴展和它們的四則運算及相關的代數法則；隨着數位擴展到有理數和實數，數字出現了不同的表示方式，我們還將介紹分數和小數（百分數從略），包括小數的性質和運算；接着我們會探討負數和實數系，包括指數與對數及其相關法則；最後我們會探討數系的代數結構，藉此希望給出整個數字系統的總體面貌。

第一節　數系及其擴展

【案例 1-1】　負 2（Negative 2）還是減 2（minus 2）？

分析：“負”2 是有向數，“減”則是一個二元運算，“減 2”是不成立的。我們只可以說“負 2”或“0 減 2”。

一、整數

1. 量與數

平時，我們經常是把“數”和“量”聯繫在一起使用的。這兩個概念之間有甚麼不同呢？大家知道，數可以表示事物的多少或事物的次序。而說到人們對“量”的認識，卻似乎不像

對數的認識那樣清晰。在我們身邊，存在着各種各樣的量。比如，親愛的讀者朋友，你正拿着的這本書有長度、有闊度還有厚度，把它與其他的一些書籍比較，也許正好一樣大，也許比某些書又要小些。倘若這時一個孩子跑過來了，想要幫你把許多暫時不看的書抱到書櫃裡去，你會關照孩子一次少抱幾本，因爲你擔心孩子的小胳膊承受不了書的重量。孩子跑了一趟很快便回來，你提醒孩子不要跑，慢慢地走……在以上描述中，你可以體會到客觀世界中的各種事物都具有量的特徵。就像我們每天生活在數的世界中一樣，我們每天也同樣生活在量的世界中，數和量似乎沒法分開。

然而，量與數的確是有區別的。有人對“量”作了這樣的規定：“量是事物存在的規模和發展的程度。量可以分爲不連續量（分離量）和連續量（相關量）兩種。”像書籍的本數、蘋果的個數都是不連續量，而長度、體積、時間、速度等都是連續量。量是可以通過測量等手段來加以認識的。事物具有的量的特徵稱爲度量，度量通常是用數量和單位量來表示的。由此說來，如果說“數”（我們這裡指的是自然數）是用來表示事物個數和次序的標記的話，那麼“量”就是表示事物性質的單位。

計數就是計算出事物的個數。計數的過程就是要把計數的對象與自然數列裡的每個數做一對一對應，也就是數數。有了自然數列，就可以更加方便地數出物體的個數。例如，要知道教室裡有多少學生，我們可以一個一個地指着學生，同時依次念出自然數列中的數 1, 2, 3, … 和所指的學生一一對應。在數的過程中只要不重複也不遺漏，數到最後一個學生所對應的那個數就是教室裡學生的人數。這就是說，數數的過程就是把要數的那個集合裡的元素與自然數列裡從“1”開始的自然數依

次建立起一一對應。

如果由小至大，每次加 1 的數，叫做順數。相反，如果由大至小，每次減 1 的數，叫做倒數。從數數的過程我們可以看出：

（1） 數數的結果總是唯一的，與所數事物的次序無關。例如，在上面的例子裡，數教室裡有多少學生，無論是按照行數，還是按照列數，只要每個學生都數到，即使再數一次，數的結果都是相同的。

（2） 數一種事物可以用另一種事物代替，然後再數代替後的事物，數得的結果是相同的。例如，數一班學生的人數可以用數這些學生的名字代替，數學生名字的結果與直接數學生人數的結果是相同的。

（3） 只要不斷地有事物可以數，數數是永遠數不完的。

2. 位值與數字系統

用符號把計數的結果記錄下來，叫做記數。在古代，由於沒有文字，人們採用“結繩記數”。以後產生了象形文字，就出現了文字記數。數有了文字記號，就標誌着它被當作物體集合的一種抽象的性質同物體集合分離開來。在世界上許多民族的文化中，都有着自己獨特的記數符號。發展到現在，常用的記數符號有：中國數字、羅馬數字、阿拉伯數字。目前世界通用的記數符號是阿拉伯數字。

按照梁宗巨的分析，記數制度包括簡單累數制（如埃及象形文字、羅馬數碼、阿提卡數碼及巴比倫楔形文字），分級符號制(如埃及的僧侶文、希臘字母記數法、希伯來字母記數法、阿拉伯字母記數法)，乘法累數制（如中國數字、越南古代數

字、泰米爾文的數字、僧伽羅文的數字）和位值制（如巴比倫記數法、瑪雅數字、中國算籌記數及印度—阿拉伯數碼)。

位置制記數法是數系發展的第一個里程碑。所謂位置制（place value system）記數法，就是運用少量的符號，通過它們不同個數的排列，以表示不同的數。世界上具有位值制思想的地區有瑪雅、巴比倫、印度和中國。在自然環境和社會條件影響下，不同的文明創造了迥然不同的記數方法。如巴比倫的楔形數字系統、埃及象形數字系統、希臘人字母數字系統、瑪雅數字系統、印度—阿拉伯數字系統和中國的算籌記數系統。

瑪雅的位值制十分明確，可是卻用 20 進位值制，有時是 18 進位值制，而且時間較晚。巴比倫的位值制是 60 進位值制的，60 以下又採用 10 進位值制的簡單累數制。印度 10 進位值制雖已在巴克沙利手稿上看到， 實際到 6 世紀末才正式使用[1] 。10 進位值制的記數法是古代世界中最先進、最科學的記數法，對世界科學和文化的發展有着不可估量的作用。正如李約瑟所說的：“如果沒有這種 10 進位制，就不可能出現我們現在這個統一化的世界了。”法國著名數學家拉普拉斯（Laplace, 1749-1827）也有一段精彩的敘述：

“用十個記號來表示一切的數，每個記號不但有絕對的值，而且有位置的值，這種巧妙的方法出自印度。這是一個深遠而又重要的思想，它今天看來如此簡單，以致我們忽視了它的真正偉績。但恰恰是它的簡單性以及對一切計算都提供了極大的方便，才使我們的算術在一切有用的發明中列在首位；而當我們想到它竟逃過了古代最偉大的兩位人物阿基米德和阿波羅尼斯的天才思想的關注時，我們更感到這成就的偉大了。”

[1]梁宗巨，王青建，孫宏安（2005)。《世界數學通史》（下册)。遼寧教育出版社。

一般人認爲印度是 10 進位值制的發明國之一。有的學者認爲，現今通用的 10 進位值制記數法，真正的源泉是中國的算籌記數法，而不是印度的婆羅米（Brahmi）文字。這是有一定道理的。印度早期的記數制度既不是 10 進位值制的（如哈拉巴(Harappa)文化)，也不是位值制(如卡羅什奇(Kharosthi)數碼與婆羅米（Brahmi）數碼)。直到西元 6 世紀後印度的記數才發展成位值制，而此時中國早已普及了使用 10 進位值制記數法的籌算。李約瑟就曾指出："在西方後來所習見的'印度數字'的背後，位置制已在中國存在了兩千年。"10 進位位置制記數產生於中國，是與算籌的使用與籌算制度的演進分不開的。

中國人使用 10 進位值制系統很早，在商代已萌芽。從現已發現的商代陶文和甲骨文中，可以看到當時已能夠用一、二、三、四、五、六、七、八、九、十、百、千、萬這十三個數字，記十萬以內的任何自然數。這些記數文字的形狀，在後世雖有所變化而成爲現在的寫法，但記數方法卻從沒有中斷，一直被沿襲，並日趨完善。

中國大約在西元前 7 世紀出現了算籌，同時有算籌記數法。用 9 個符號（每個符號有橫、縱兩種寫法）便足以表示一切數，如圖 1-1 所示。個、百、萬……用縱式，十、千、十萬……用橫式。因此，用這 18 個符號，及用空位表示 0，可以表示任何一個自然數。比如，1997 便表示成 𝍩𝍨𝍱𝍦。

中國算籌記數儘管數碼有兩種形式，但完全有 10 進位值制的特點，即既是 10 進，又是位值制。因此可以說中國的算籌記數是世界上最早的 10 進位值制記數法。

縱式	𝍠	𝍡	𝍢	𝍣	𝍤	𝍥	𝍦	𝍧	𝍨
橫式	𝍩	𝍪	𝍫	𝍬	𝍭	𝍮	𝍯	𝍰	𝍱
	1	2	3	4	5	6	7	8	9

圖 1-1 中國算籌

10 進位值制記數法包括 10 進位和位值制兩條原則。現在通行的印度—阿拉伯數碼採用 10 進位值制記數法，即任何一個自然數都可以表示成 $a_n \cdot 10^n + a_{n-1} \cdot 10^{n-1} + ... + a_1 \cdot 10 + a_0$ 的形式。其中，10 叫做進位基數，10 進就是逢 10 進 1，a_0, a_1, …, a_n 是 1, 2, …, 9, 0 這 10 個數碼中的某一個，而 $a_n \neq 0$。所謂位值制就是在書寫時省去 10 的乘冪與加號。比如 123，是 $1 \cdot 10^2 + 2 \cdot 10 + 3$ 的簡寫。因此，10 進位值制的特點是只用這 10 個數碼便可將任何自然數表示出來。從右邊算起，數碼所在的位置依次稱爲個位，十（10）位，百位（100）等等。一個數碼表示甚麼數值，要看它在甚麼位置上。同一個數碼“2”可以表示 2，也可以表示 20 或 200，只要將它放在十位或百位上，222 即表示二百二十二。這就是“位值”（place value 或 positional value）的含義。

在數學中，一串相連符號如 $1\frac{2}{3}$，3a 等可以有不同意義，而在常用的阿拉伯數字如 7985 是指 $7\times10^3 + 9\times10^2 + 8\times10^1 + 5\times10^0$。一般而言，$a_n a_{n-1} \ldots a_2 a_1 a_0$ 即是 $\sum_{r=0}^{n} a_r 10^r$。這可以推廣到小數及不同位值，於此不贅。

3. 整數的加法

整數的加法運算可分爲以下兩部分：

（1） 一位數的加法：兩個一位數相加可以直接用數數的方法得出和。通常把兩個一位數相加的結果編加法表，如表1-1 所示。

+	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
9	10	11	12	13	14	15	16	17	18

表 1-1 加法表

（2） 多位數的加法：相同數位上的數相加，哪一位上的數加滿十，要向前一位進一。

多位數加多位數時，可以先把兩個多位數分別寫成不同計數單位的和的形式，再根據加法的運算定律和一位數加法法則分別把相同的計數單位的數加起來。我們看下面的例子。

【案例 1-2】 $567 + 418 = 985$

分析： $567+418$

$= (500 + 60 + 7) + (400 + 10 + 8)$
$= (500 + 400) + (60 + 10) + (7 + 8)$ （交換律、結合律）

$$\begin{aligned} &= 900 + 70 + 15 \\ &= 900 + 70 + (10 + 5) \\ &= 900 + (70 + 10) + 5 \\ &= 900 + 80 + 5 \\ &= 985 \end{aligned}$$

爲了便於把相同計數單位上的數分別相加，通常寫成豎式進行計算，即

$$\begin{array}{r} 567 \\ +\ 418 \\ \hline 985 \end{array}$$

因此，多位數的加法豎式計算的法則是：數位對齊，從個位加起，滿十進一。

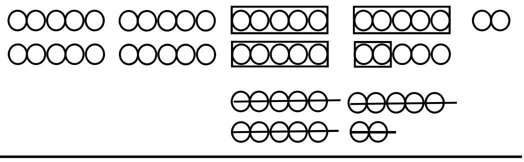
4. 整數的減法（退位減法）與結合律

上面已看到，簡單的加法其實已運用了一些運算規律，包括交換律和結合律。而退位減法其實是用了結合律。因兩個個位數相加可以用直接數數的方法得出和，習慣上我們可以編成加法表，故任何不大於 18 的自然數被減去個位數，均可直接得到答案。

【案例 1-3】 $42 - 17 = 25$

分析：在這裡，我們要向學生強調“數的位值”。也就是說，42 裡面的“4”是代表 40 而不是“4”，17 裡面的“1”代表 10 而不是“1”。這是教師必須經常提醒學生要注意的地方。另外，教師需要注意：用結合律講解減法是關鍵所在。

$$\begin{array}{r} 42 \\ -17 \\ \hline 25 \end{array}$$ 的意思是



−）

20　　　+5

我們就以 42 – 17 爲例，仔細分析以下各步驟中所用的結合律和交換律：

$$\begin{aligned}
42-17 &= 42+(-17) \\
&= 42+[(-10)+(-7)] \\
&= [42+(-10)]+(-7) && \text{（運用結合律）} \\
&= [(30+12)+(-10)]+(-7) \\
&= \{30+[12+(-10)]\}+(-7) && \text{（運用結合律）} \\
&= \{30+[(-10)+12]\}+(-7) && \text{（運用交換律）} \\
&= \{[30+(-10)]+12\}+(-7) && \text{（運用結合律）} \\
&= [30+(-10)]+[12+(-7)] && \text{（運用結合律）} \\
&= 20+5 \\
&= 25
\end{aligned}$$

由此可見，退位減法可以用以上一連串數式解釋：當被減數中的個位數不夠減時，便要向十位數借一；這時該位數馬上變成十，並且可與個位數結合再消去減數中的個位數。所以，退位減法的關鍵是結合律。

【案例 1-4】　957 – 462 = 495

分析：

$$\begin{array}{r} 957 \\ -)\ 462 \\ \hline ??? \end{array} \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{r} 900+50+7 \\ -)\ 400+60+2 \\ \hline \end{array} \quad \Rightarrow$$

$$\begin{array}{rrr} & 800 + 150 + 7 \\ -) & 400 + \ \ 60 + 2 \\ \hline & 400 + \ \ 90 + 5 \end{array} \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{rr} & 957 \\ -) & 462 \\ \hline & 495 \end{array}$$

5. 整數乘除法

乘法的意義在於連加，但同時也有累積和面積的意義。

（1）整數的乘法

乘法是重複加法的簡寫。例如：

$$12 \times 5 = \underbrace{12 + 12 + 12 + 12 + 12}_{5\text{ 次}}$$

一般的，如果 b 是不小於 2 的整數，b 個相同的加數 a 的和是 c，即

$$\underbrace{a + a + \cdots + a}_{b\text{ 個 }a} = c，$$

那麼，c 就叫做 a 和 b 的積，記作

$$a \times b = c \quad 。$$

數 a 叫做被乘數，數 b 叫做乘數，被乘數和乘數又都叫做積的因數。“$a \times b$”讀作“a 乘以 b”或“b 乘 a”。求兩個數的積的運算叫做乘法。當乘數 b 是 1 或者 0 時，還要補充：

$$a \times 1 = a \quad ， \qquad a \times 0 = 0 \quad 。$$

在小學數學教材中，一般把整數乘法的定義表述爲："求幾個相同加數的和的簡便運算叫做乘法。"

乘過後的結果叫"積"。延伸到高等數學積分也有着面積和連加的意義。把函數值"一片片"加起來就是面積，也就是定積分了。

（2）整數乘法的結合律

整數運算中，我們會依照一定的運算順序。那麼，爲何要先乘除後加減？

這其實只是一種約定俗成。一般來說，$a\triangle b\square c$ 沒有說定先做△還是先做□。尤其在$(a\triangle b)\square c$ 不同於 $a\triangle(b\square c)$之時，也不一定說要按從左到右的順序。但簡略書寫是數學上常見的情況，在數學用語中有所謂"當無混淆情況下可省略"的做法。例如，理論上必須寫 $(3+4)+5$，但由於加法滿足結合律，即：$(3+4)+5=3+(4+5)$，故可以省略地寫爲 $3+4+5$。同樣，嚴格意義上來說，我們必須寫 $(3\times 4)\times 5$，但由於乘法符合結合律，即$(3\times 4)\times 5=3\times(4\times 5)$，故可省略地寫爲 $3\times 4\times 5$。其他的還有像 $3a$ 即是 $3\times a$ 的簡寫。但是對於 $3+4\times 5$，我們就不能隨便省略地書寫。因爲不知道它是指 $(3+4)\times 5$，還是 $3+(4\times 5)$，而這兩個結果是不相同的。不過，由於大家約定了"先乘除後加減"，故而$3+4\times 5$習慣上是指$3+(4\times 5)$。其他的比如 $2\sin^2\theta$ 就是 $2\times(\sin(\theta))^2$ 的略寫……等等道理與此相同。

【案例 1-5】　$34\times 82=2788$

分析：常用的乘法可以寫成如下

$$
\begin{array}{r}
34 \\
\times \quad 82 \\
\hline
68 \\
2720 \\
\hline
2788
\end{array}
\quad \leftarrow
$$

因爲 82 中的 8 是十位數，
所以有 $34 \times 80 = 2720$

（3）整數乘法與分配律

減法的關鍵是結合律；而乘法的關鍵則是分配律，即對於任何整數 a, b, c 都有：

$$\boxed{a \times (b + c) = (a \times b) + (a \times c)}$$

所以，乘法的法則就是運用分配律。例如在【案例 1-5】中：

$$
\begin{aligned}
34 \times 82 &= 34 \times (80 + 2) \\
&= (34 \times 80) + (34 \times 2) \\
&= 2720 + 68 \\
&= 2788
\end{aligned}
$$

而該乘法的機械性的計算，則是寫成：

$$
\begin{array}{r}
34 \\
\times \quad 82 \\
\hline
68 \\
272 \\
\hline
2788
\end{array}
\quad \leftarrow
$$

其中 2720 中的 0，通常可
以不寫。因爲任何的演算
法，都是力求簡化的。

教師只要向學生解釋是因爲運用了分配律乘法公式的寫法才變得簡單，學生自然就明白了。值得一提的是，英國一項考查數學教師水準的測試中也有一題是要求教師解釋 63×37 哪裡

用了分配律。

下面我們通過例子（由於加法滿足結合律，多餘的括弧便不寫了），看看假如不用普通演算法，而用分配律，怎樣做乘法。

【案例 1-6】　$725\times 143 = 103675$

分析：　用分配律計算：

$$\begin{aligned}725\times 143 &= 725\times(100+40+3)\\ &= (725\times 100)+(725\times 40)+(725\times 3)\\ &= 72500+29000+2175\\ &= 103675\end{aligned}$$

在普通演算法中：

$$\begin{array}{r} 725\\ \times\quad 143\\ \hline 2175\\ 2900\\ 725\\ \hline 103675\end{array}$$

在普通演算法中，如果我們想“偷懶”而不寫 0，則必須要對位：因爲“2900”其實是“29000”，“725”是“72500”。所以，在要求學生對位時，我們必須向學生解釋清楚數的位值，而利用分配律解釋是唯一正確的方法。當然，爲達計算目的，用甚麼正確的方法計算都是可以的。

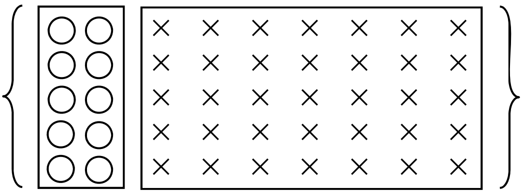
一般來說，做數學有很多方法，雖然有時會要求學生只用特定方法去做，但我們總是希望學生能嘗試用多種不同方法去探討，只要計算達到目的就行。這樣既能避免學生因怕錯、怕被扣分，而不敢大膽去做數學，又不會覺得數學難學了。分配

律、結合律和交換律這些基本運演算法則，在任何年級都可以教，即使是小學一年級。只需逐步讓學生瞭解這些法則，他們甚至會對它們肅然起敬的！

如果要向學生解釋分配律，可從簡單的乘數說起。比如考慮下述簡單例子：

【案例 1-7】 $5 \times 9 = 5 \times (2 + 7) = (5 \times 2) + (5 \times 7)$

分析：

5×2  5×7

可以看到，分配律可以讓乘法的演算法變得機械化和簡單。

教小學三年級時，如果學到百位數乘法，如 123×3，老師在用普通方法教授時，也可嘗試用分配律去解釋：

在普通演算法中：

$$\begin{array}{r} 123 \\ \times \quad 3 \\ \hline 9 \\ 60 \\ 300 \\ \hline 369 \end{array}$$

用分配律解釋：

$$\begin{aligned} 123 \times 3 &= (100 + 20 + 3) \times 3 \\ &= 300 + 60 + 9 \\ &= 369 \end{aligned}$$

在實際教學時，可先教學生個位數乘多位數，例如：123×3；然後再教十位數乘多位數，例如：125×40；最後教百位數乘多位數，例如：871×500。先把這些簡單情況向學生說明，

然後再借助分配律把結果綜合起來。總的說來，要一層一層，從簡單到複雜，按層次教學。

對於乘法中涉及的位值，教師是需要解釋清楚的。教師在教學生技巧的同時也要讓學生弄清算理。至於學生的解題方法，不必強求一定要唯一，可讓學生先自己嘗試，找出最簡便的。作爲教師，我們要不斷提醒學生，乘法運算中重要的是理解位值的意義以及有理性地去學數學。

（4）整數除法運算及意義

在基本計算中，除法可以看成是乘法的逆運算。如果 $A \times B = C$，而且 B 不等於零，那麼 $C \div B = A$。

上面等式中，A 叫做商數，B 叫做除數，C 叫做被除數。如果除式的商數（A）必須是整數，而除數（B）和被除數（C）並非因數關係的話，會出現相差的數值，稱它爲餘數（D）。即是，$C \div B = A \ldots\ldots D$，這也意味着 $C = A \times B + D$。

在實際問題中，除法所反映的實際含義有兩種：①把一個數平均分成幾份，求每份是多少；②求一個數裡包含幾個另一個數。前者叫做等分除法，後者叫做包含除法。例如："把 6 隻皮球平均放在 2 個盒子裡，每盒放幾個？" 屬於等分除法；"把 6 隻皮球每 3 個放一盒，可以裝幾盒？" 就屬於包含除法。在解決這兩個問題時，我們可以發現，雖然最後形成的除法 "$6 \div 2 = 3$" 和 "$6 \div 3 = 2$" 可以說是一個硬幣的兩面，但是解決這兩問題時的認知運作過程顯然是不同的。

整數的除法可以視爲一連串的減法，而每個減數都是相同的。例如："$12 \div 4 = ?$"便可看成是 $12 - 4 = 8$，$8 - 4 = 4$，$4 - 4 = 0$，又因爲有三個減數的關係，因此，$12 \div 4 = 3$。 但是，除

法演算法其實是一個較艱深的概念。下面，我們先借助一個例子來說明：

【案例 1-8】 $3136 \div 8 = 392$

分析：

$$
\begin{array}{r}
392 \\
8\,\overline{)3136} \\
\underline{24} \\
73 \\
\underline{72} \\
16 \\
\underline{16}
\end{array}
$$

其實是：

$$
\begin{aligned}
3136 &= 8 \times 300 + 736 \\
&= 8 \times 300 + 8 \times 90 + 16 \\
&= 8 \times 300 + 8 \times 90 + 8 \times 2 \\
&= 8 \times (300 + 90 + 2) \text{（分配律）} \\
&= 8 \times 392
\end{aligned}
$$

可見，在除法 $3136 \div 8 = 392$ 中，我們需要用乘法來解釋其意義：商數 392 乘以除數 8 可得被除數 3136，所以 392 正是將 3136 平均分成 8 份後的每一份大小。而除法正是想找這個 392，因此，$3136 \div 8 = 392$ 的意義是 $392 \times 8 = 3136$。需要注意的是：除法的正確性是建立在乘法分配律正確性的基礎上。

綜上我們可以看出：乘法是重複的加法，除法則是重複的減法。

整數除法的意義包含有三種：1）“連減”；2）乘的逆；3）分物（等分）除與包含除。若被除數不能被整除，則會有餘數出現。但我們仍能用乘法的分配律來解釋。我們看看下面的例子：

【案例 1-9】　$3421 \div 18 = 190 \ldots\ldots 1$

分析：

$$
\begin{array}{r}
190 \\
18\,\overline{)\,3421} \\
\underline{18} \\
162 \\
\underline{162} \\
1 \\
\underline{0} \\
1
\end{array}
$$

其實是：

$$
\begin{aligned}
3421 &= 18 \times 100 + 1621 \\
&= 18 \times 100 + 18 \times 90 + 1 \\
&= 18 \times (100 + 90) + 1 \\
&= 18 \times \underbrace{190}_{\text{商數}} + \underbrace{1}_{\text{餘數}}
\end{aligned}
$$

給定任何兩數，都可以找到一個以除數、商數和餘數寫成的算式來表示該數（被除數）；當餘數爲零時，則表示可以整除。通過上述兩個例子（案例 1-8 和案例 1-9）中，我們都可以看到，左邊的一般除法演算法，均可用右邊的乘法和分配律來解釋。

6. 質數與合數

質數與合數是我們對自然系的一種分類方式，不過學生卻有這樣的疑問：爲何規定 1 不是質數？

1 既不是質數，也不是合數。怎樣回應學生的困惑呢？倘若僅僅用“規定”一詞來解釋未免太武斷了。簡單地說，若 1 算是質數，把 324 作質因數分解，就可以有 $1\times2^2\times3^4$, $1^5\times2^2\times3^4$, … 不同的分解。這樣分解就不唯一了。故 1 被排除在質數的行列之外。

任何大於 1 的自然數 a 都可以寫成 $a = 1 \times a$。這說明，任何大於 1 的自然數都有 1 與自身兩個因數。同時，在這些數中，有的只有 1 和自身兩個因數，有的還有其他的因數。因此，大

於 1 的自然數可以按照每個數的因數的個數分成兩大類：

質數： 大於 1 的自然數，如果只有 1 與自身兩個因數，這樣的數就稱爲質數，也稱爲素數。如 2、3、5、7、11 等。2 是最小的質數，也是質數中唯一的偶數（雙數）；其他質數都是奇數（單數）。

合數： 大於 1 的自然數，如果除了 1 與自身以外，還有其他的因數，這樣的數就稱爲合數。如 4、6、8、9、10 等。

按上述定義，1 既不是質數，也不是合數。由此，全體自然數可以分成三類：1、質數和合數。

人們一般總把整數看作是最基本的數，其他的數都是由整數衍生出來的。不過專門研究整數的人卻不這樣看，他們認爲，質數才是最基本的數，因爲任何大於 1 的整數要麼是質數，要麼是若干個質數的積。中國古代的數學家把質數叫做“數根”，意思是數的根本，足見質數的重要。從這裡，我們也可以體會到爲甚麼 1 不是質數，因爲不能用 1 的乘積來衍生出其他的整數。

德國數學家高斯（C. F. Gauss, 1777-1855）曾經說過，“數學是科學的皇后，數論是數學的皇冠”，可見數論在數學中的重要地位。數論是一門專門研究整數的數學分支。法國數學家費馬（P. de Fermat, 1601-1665）曾這樣說過，“全部數論問題就在於以何種方法來將一個整數分解質因數。”費馬的話並不偏激，從數論近二百年的發展歷史來看，人們在這個領域裡所集中研究的，正是與質數有關的那些問題。這也可以從另一側面來理解爲何“1”不被視爲質數。

無論是古希臘或近代，數學家們均希望掌握質數的規律，

從而瞭解整個數字系統的主圖。而最先想到的問題是：質數是否存在着有限個數呢？這被歐幾里得（Euclid, 約公元前 330-275）否定了。歐幾里得證明的方法確實十分巧妙，詳見附錄 1。

之後，約在西元前 250 年，希臘數學家、亞歷山大圖書館館長埃拉托色尼（Eratosthenes）想到了一個非常美妙的尋找質數的方法，該方法既能避免逐一檢查每個數，又可以比較簡單地從一大堆數字之中篩選出質數來，這方法被稱作埃拉托色尼篩法（Sieve of Eratosthenes），詳見附錄 1。

質數近來被廣泛地應用在各個方面，包括密碼學、汽車變速箱齒輪設計，以至防治農作物害蟲方面亦有作用。有興趣的讀者可參看其他討論質數的書籍。

7. 最大公因數與最小公倍數的求法

異分母分數作加減時，通常先要找得兩數（分母）的最大公因數，那就先要把兩數的分母作質因數分解。例如：求 24 和 60 的最大公因數和最小公倍數，可先將 24 和 60 分別作質因數分解：

$$24 = 2^3 \times 3$$

$$60 = 2^2 \times 3 \times 5$$

從而得知 24 和 60 的最小公倍數是 $2^3 \times 3 \times 5=120$，最大公因數是 $2^2 \times 3=12$。除此之外，現時教材中也有不少其他常用的找最大公因數和最小公倍數的方法。

（1）用排列倍數法求最小公倍數和最大公因數

利用排列兩數各自的因數的方法，可輕易求出兩者的最大公因數。

例如，求 24 和 60 的最大公因數。

1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24
1, 2, 3, 4, 5, 6, 10, 12, 15, 20, 30, 60

1, 2, 3, 4, 6, 12 均是 24 和 60 的公因數，而最大公因數就是 12。

同樣的道理，我們可以用排列各自的倍數的方法去求最小公倍數。例如，求 6 和 10 的最小公倍數。

6, 12, 18, 24, 30, 36, 42, 48, 54, 60, 66, …
10, 20, 30, 40, 50, 60, 70, …

於是 30, 60, … 等均是 6 和 10 的公倍數，最小公倍數是 30。

從獲得答案來說，這個方法其實是比較費時的，尤其是對於兩個相差比較大的數。例如，求 3 和 10 的最小公倍數。

3, 6, 9, 12, 15, 18, 21, 24, 27, 30, 33, …
10, 20, 30, 40, 50, … （要到第 9 個數才找到！）

不過，這個方法能夠用圖案很好地表示。比如兩人同時於同一處出發跑圈，甲 6 分鐘跑一圈、乙 10 分鐘跑一圈，如圖 1-2 所示，問他們何時相遇？再比如用半徑爲 6cm 的小圓在半徑爲 10cm 的大圓內滾動，如圖 1-3 所示，問起始的點 P 何時再回到原來的位置？

此外，我們更可看到，兩數的公倍數都是其最小公倍數的

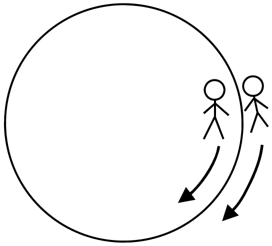


圖 1-2 甲乙速度不同，跑一圈，何時相遇？

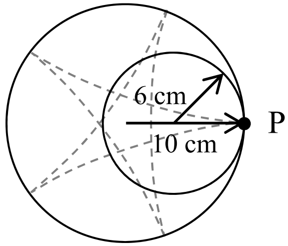


圖 1-3 小圓在大圓內壁滾動，點 P 何時回到原位？

倍數。這個結論的證明並不太直接。

（2）輾轉相除法

這種方法是中國的一項偉大發明，對於數值較大而又不容易找到公因數的數來說尤爲方便。

由 $3421 = 18 \times 190 + 1$ 可知，3421 與 18 的最大公因數是 1。這是爲甚麼呢？假設 c 爲 3421 與 18 的任何公因數，則：

$$\frac{3421}{c} = \frac{18 \times 190 + 1}{c} = \frac{18}{c} \times 190 + \frac{1}{c}$$

因爲 $\frac{1}{c}$ 一定要是整數，所以 c 必定是 1。因此 3421 與 18 的最大公因數是 1。這裡，教師還需要知道的是，由於 $(\mathbf{Z}, +, -)$ 不是域（見本章第二節），故而一個整數未必能被另一個整數整除，可能有餘數。

我們可將上述討論的結果寫爲一條法則：

【帶餘除法法則】給出任何正整數 a 與 b，則有唯一的非負整數 q 及 r，使得 $a = b \cdot q + r$，其中 $0 \le r < b$，q 稱之爲**商數**，r

稱之爲**餘數**。

例如：$\underset{a}{3421} = \underset{b}{18} \times \underset{q}{190} + \underset{r}{1}$

【案例 1-10】 求 3136 與 104 的最大公因數。

分析：首先計算得出 $3136 = 104 \times 30 + 16$，這裡的 16 是餘數。注意所求的公因數必定能整除 16。再從 16 和 104 的公因數着手，繼續找下去，把找因數的範圍不斷縮小。由於 $104 = 16 \times 6 + 8$，而 8 可整除 16，所以最大公因數是 8。

以上其實就是利用輾轉相除的方法找最大公因數。

輾轉相除法，又叫歐幾里得演算法（Euclidean algorithm），是一種求兩個正整數的最大公因數的演算法。它是我們已知的最古老的演算法，可追溯至 3000 年前。它首次出現於歐幾里得的《原本》（第 VII 卷，命題 i 和 ii）中，在中國則可以追溯至東漢出現的《九章算術》裡。

運用輾轉相除法求兩個數的最大公因數並不需要把兩數進行質因數分解，其方法是：用較小數除較大數，再用出現的餘數（第一餘數）去除除數，然後再用出現的餘數（第二餘數）去除第一餘數，如此反復，直到最後餘數是 0 爲止。最後的除數就是這兩個數的最大公因數。

【案例 1-11】 求 323 與 884 的最大公因數。

$884 = 323 \times 2 + 238$
$323 = 238 \times 1 + 85$
$238 = 85 \times 2 + 68$

$$\begin{array}{r} 884 \\ -)\ 646 \\ \hline 238 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 323 \\ -)\ 238 \\ \hline 85 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 238 \\ -)\ 170 \\ \hline 68 \end{array}$$

$85 = 68 \times 1 + 17$
$68 = 17 \times 4$

答案是：17

可以將上述幾步用一個綜合除式表示如下：

	884	323	2
	646	238	
1	238	85	2
	170	68	
1	68	17	4
	68		
	0		

第一次：用 323 除 884，商 2 餘 238

第二次：用 238 除 323，商 1 餘 85

第三次：用 85 除 238，商 2 餘 68

第四次：用 68 除 85，商 1 餘 17

所以若要找公因數，只需用輾轉相除法，而不必用因數分解。事實上，經過這樣的分析，我們也能比較容易地對 884 和 323 進行因數分解了：

$$\begin{aligned} 884 &= 17 \times 52 \\ &= 17 \times 4 \times 13 \\ 323 &= 17 \times 19 \end{aligned}$$

可見，運用輾轉相除法這樣簡單的演算法，可以得到意想不到的結果。

因數分解其實是一件很難做的工作，數學家們也絞盡腦汁地尋找給任意整數因數分解的快速方法。假如要對一個 180 位整數進行因數分解，以現在的科技來估計，即使利用全世界所有計算機的計算功能，50 年內恐怕都做不到。正因爲對大的

整數很難進行因數分解，甚至連電腦也應付不來，所以密碼學就被創造出來了。例如，$m \cdot n = A$ 就表示密碼和譯碼的關係。不過，對於任何整數 m 和 n，求它們的最大公因數卻是很簡單的：用輾轉相除法。

輾轉相除法其實還隱藏着很多學問。在【案例 1-11】中，我們若將數式倒轉過來寫，就會有：

$$
\begin{aligned}
17 &= 85 - 68 \times 1 \\
&= 85 - [238 - (85 \times 2)] \times 1 \\
&= 85 \times 3 - 238 \times 1 \\
&= (323 - 238) \times 3 - 238 \\
&= 323 \times 3 - 238 \times 4 \\
&= 323 \times 3 - (884 - 323 \times 2) \times 4 \\
&= 323 \times 11 - 884 \times 4\text{。}
\end{aligned}
$$

由此可見，17 不但是 323 及 884 的最大公因數，而且也是 323 和 884 的倍數之和（或差）。因此，任何兩數的公因數，也是這兩數的倍數之和（或差），可以用這兩數的線性關係表達。這就是歐幾里得演算法或輾轉相除法的一個特別的推論。

（3）短除法

短除符號就是把除號倒過來。而短除就是在除法中寫下兩個數被共有的質因數整除的商之後再除，除數的地方寫兩個數共有的質因數，然後以此類推，直到結果互質爲止（兩兩互質）。

在用短除法計算多個數時，對其中任意兩個數存在的因數都要算出來，其他沒有這個因數的數按原樣落下，直到剩下每兩個數都是互質關係。

另外，我們可以發現：求最大公因數只需乘一邊，求最小公倍數則需把直和橫兩邊的數字全部相乘。例如，12 和 18。它們都有公因數 2 和 3，它們的乘積 $2 \times 3 = 6$ 就是 12 與 18 的最大公因數，而乘積 $2 \times 3 \times 2 \times 3 = 36$ 就是 12 與 18 的最小公倍數，如圖 1-4(a) 所示。

再比如說，12、30 和 50。12 與 30 都有公因數 2、3 和 5，50 則沒有因數 3，便自動落下。於是，2 就是 12、30 與 50 的最大公因數，而乘積 $2 \times 3 \times 5 \times 2 \times 1 \times 5 = 300$ 就是 12、30 與 50 的最小公倍數，如圖 1-4 (b) 所示。這是比較簡便的做法，尤其對於兩個含有較多公因數（這些公因數又比較容易找出來）的數就特別方便。如果要說明其背後原理也不困難。

$$\begin{array}{r|ll} 2 & 12, & 18 \\ \hline 3 & 6, & 9 \\ \hline & 2, & 3 \end{array}$$

(a) 最大公因數是 $2 \times 3 = 6$

$$\begin{array}{r|lll} 2 & 12, & 30, & 50 \\ \hline 3 & 6, & 15, & 25 \\ \hline 5 & 2, & 5, & 25 \\ \hline & 2, & 1, & 5 \end{array}$$

(b) 最小公倍數是 $2 \times 3 \times 5 \times 2 \times 1 \times 5 = 300$

圖 1-4

【案例 1-12】　求 120 和 210 的最大公因數與最小公倍數。

分析：由於 2、3 和 5 均是 120 和 210 的公因數，如圖 1-5 所示，自然 $2 \times 3 \times 5$ 也是 120 和 210 的公因數，而“抽出”這三個公因數後得的 4 和 7 再沒有因數，故 $2 \times 3 \times 5$ 便是 120 和 210 的最大公因數。

此外，$2 \times 3 \times 5 \times 4 = 120$，$2 \times 3 \times 5 \times 7 = 210$，因此 120

和 210 的最小公倍數起碼要包含 2、3、5、4 和 7 這些“成分”，而重複的數字（即 2、3 和 5）可省略一次，故此 120 和 210 的最小公倍數就是 $2\times3\times5\times4\times7$。

案例 1-12 中使用的短除法對於兩個以上的數就有些麻煩了，例如求 70、30 和 105 的最大公因數。我們仍要設法抽出它們的公因數，即數 5，如圖 1-6 所示。但 $5\times14\times6\times21$ 決不是 70、30 和 105 的最小公倍數，因爲 14、6 和 21 仍有它們的“重疊”部分。若繼續用這個方法，就只有兩個數的公因數被“抽出”來，得到答案是 $5\times2\times3\times7$，如圖 1-7 所示。不過，需要注意的是，有時會對兩個數來抽出公因數，有時又會對三個數抽出公因數，這樣容易產生混亂，故此，一般對兩個以上的數求最大公因數或最小公倍數都不建議用此法。

求三個或三個以上的最大公因數，可以先求出其中兩個數的最大公因數，再求所得的數與第三個數的最大公因數，依次類推，一直求到最後一個數，最後得到的最大公因數就是這幾個數的最大公因數。

2	120,	210
3	60,	105
5	20,	35
	4,	7

圖 1-5 兩數的最大公因數

5	70,	30,	105
	14,	6,	21

圖 1-6 三數的最大公因數

5	70,	30,	105
2	14,	6,	21
3	7,	3,	21
7	7,	1,	7
	1,	1,	1

圖 1-7 三數的最小公倍數

二、分數

1. 分數的意義

在小學教科書中，分數的界定與等分相關。把單位“1”平均分成若干等份，表示這樣的一份或幾份的數叫做分數，其中表示這樣的一份的數叫做分數單位。這是我們熟悉的分數的通常的意義。

其實，分數還有另外一個意義。比方說$\frac{4}{5}$理解爲把 4 個單位分成 5 等份後，表示這樣一份的數。也就是說，$\frac{4}{5}$是“4 除以 5”。一般的教科書把這個意義當作是理所當然的，不作任何解釋。實際上它還是需要進一步闡述清楚的。除了“等分除”以外，還有“包含除”。例如，有 24 顆糖，如果每 6 顆一包，可分作多少包？一般的說法是，等分除中的“各數”（單位）保持不變，如把 24 顆糖分給 6 人，就是

$$24(\text{顆}) \div 6 = 4(\text{顆})$$

至於包含除，就有所謂“名數除名數等於‘無名數’”這個口訣。“名數”就是具有單位的數，即

$$24(\text{顆}) \div 6(\text{顆}) = 4$$

其實更爲確切地（當然有點繁瑣），前一個例子是

$$24(\text{顆}) \div 6\text{ 人} = 4(\text{顆/人})$$

後一個例子是

$$24(\text{顆}) \div 6\ (\text{顆/包}) = 4(\text{包})$$

倘若我們再深入看這個問題，其實這些都是除法的實際意義。

在數學上，除法就是乘法的逆運算，換言之，$a \div b$ 是

$$bx = a \quad 或 \quad xb = a$$

（無所謂因交換律成立）的解。從這個高度去看，除法同時能爲等分和包含建模。當然也可倒過來看，人類是從等分、包含等活動中抽象出除法這運算來。

【案例 1-13】 爲甚麼 $\frac{4}{5}$ 是“4 除以 5”？

分析：“4 除以 5”的普通意義是“將 4 分成 5 等份，則每份的大小就是 4 除以 5”。首先我們將 4 分成 (4×5) 等份，即分成 20 等份。每個等份的大小就是 $\frac{1}{5}$，如圖 1-8 所示。

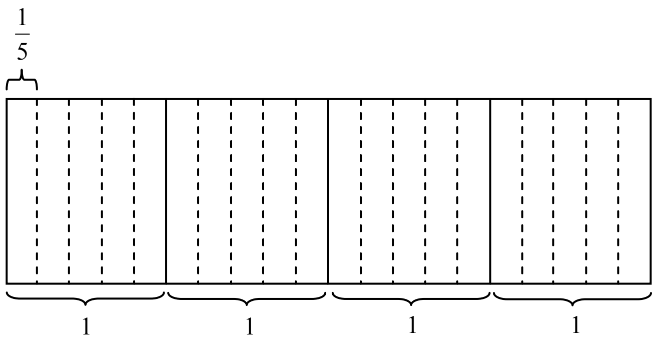


圖 1-8　4 分成 20 等份

若將 4 分成 5 等份，則這個等分的每份大小就會由以上 4 個 $\frac{1}{5}$ 合併而得，即 $\frac{4}{5}$，如圖 1-9 所示。

對於一般的 $\frac{m}{n}$，也可以用同樣的辦法解釋，即 $\frac{m}{n}$ 可以看成“m 除以 n”。有興趣的讀者可以模仿例 1-13 的方法做類似

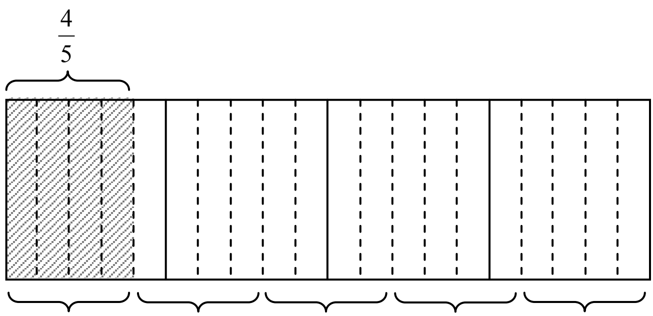


圖 1-9　4 個 $\frac{1}{5}$ 合併

的等分與合併。

人類歷史上最早產生的數是自然數（正整數），而在以後的度量和均分時往往不能正好得到整數來表示度量的結果，這樣就產生了分數。當我們用一個作標準的量（度量單位）去度量另一個量，只有當量經過若干次正好量盡的時候，才可以用一個整數來表示度量的結果。例如，用 b 作標準去量 c：一種是把 b 分成 n 等份，用其中的一份作爲新的度量單位去度量 c，量 m 次正好量盡，就表示 c 含有把 b 分成幾等份以後的 m 個等份。如右圖 1-10 中，把 b 分成 4 等份，用其中的一份去量 c，量 11 次恰好量盡。如果量若干次都不能正好量盡，就會有兩種情況：其一，不能用一個整數表示用 b 去度量 c 的結果，就必須要引進一種新的數——有理數。其二，如果這樣的 n 和 m 不存在，就要引進

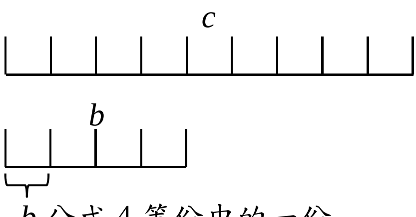


圖 1-10　用 b 度量 c

另一種新的數——無理數。

另外，從整數的計算的角度考慮，兩個整數相除，有時不能得到整數商，爲了使除法運算總可以施行，也需要引進新的數——分數。

2. 約分與擴分

分數的一個基本法則是約分法則，即若 n 爲任何正整數，則 $\frac{n\cdot a}{n\cdot b}=\frac{a}{b}$ 。

【案例 1-14】 $\frac{4\times 2}{4\times 3}=\frac{8}{12}$ 等於 $\frac{2}{3}$ 嗎？爲甚麼？

分析： $\frac{2}{3}$ 的意義是把“1”分成 3 等份取其中 2 份的大小，如圖 1-11 所示。

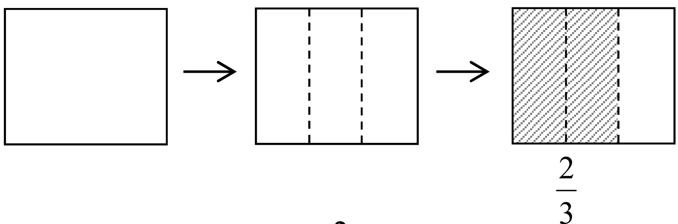


圖 1-11 $\frac{2}{3}$ 的意義

$\frac{4\times 2}{4\times 3}=\frac{8}{12}$ 的意義是把“1”分成 12 份取其中 8 份的大小，如圖 1-12 所示。

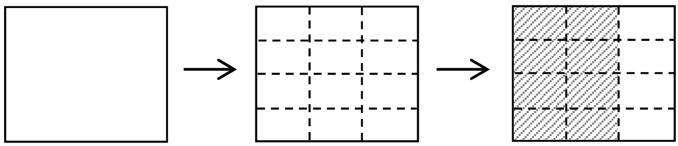


圖 1-12 $\frac{8}{12}$ 的意義

很明顯，圖 1-11 與圖 1-12 中陰影部份的面積大小是相等的。在一般的情況下，我們可以用同樣的分法去證明 $\frac{n \cdot a}{n \cdot b} = \frac{a}{b}$ 。

約分反過來就是擴分。中國古代自《算數書》、《周髀算經》及《九章算經》等就巧妙地透過擴分作通分，從而進行分數運算。簡單來說，對於 $\frac{4}{7}u$ 及 $\frac{3}{8}u$，無論要進行比較或運算，想像我們均化成 56 爲新單位（即 $1u = 56v$），這兩個分數馬上變成了 $32v$ 和 $21v$，這樣就可以用整數的方法加以處理，即所謂“齊同術”，於此不贅。

3. 分數加法

（1）分數加法的意義

【案例 1-15】　4 mile（英里）+ 3 km（千米）= ?

分析：由於運算前需要化爲同一單位元元後才能相加，因此只需把它們同時都化爲 mile 或同時都化爲 km 便可。因爲：

$$1 \text{ mile} = 1.6 \text{ km} \quad ， \quad 1 \text{ km} = 0.62 \text{ mile} \quad ，$$

所以

$$4 \text{ mile} + 3 \text{ km} = (4 \times 1.6) \text{ km} + 3 \text{ km} = 9.4 \text{ km}，$$

或者

$$4 \text{ mile} + 3 \text{ km} = 4 \text{ mile} + (3 \times 0.62) \text{ mile} = 5.86 \text{ mile}。$$

也就是說，若有兩個量要相加，我們可能要先花些工夫（比如先化爲同一單位）後才能進行運算。對於分數加法，也有類似的要求。

【案例 1-16】 $\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}=?$

分析：這個問題與案例 1-15 的性質相同，因爲$\dfrac{1}{2}$與$\dfrac{1}{3}$的大小“不相容”，意義也不相同，如圖 1-13 所示。

$\dfrac{1}{2}$ $\dfrac{1}{3}$

圖 1-13 $\dfrac{1}{2}$與$\dfrac{1}{3}$的大小

顯然，一個比另一個大，但究竟大多少呢？我們從圖中是看不出來的，就像我們知道 mile 比 km 大一樣，但是沒有換算方法它們仍不能相加。從案例 1-15 的解答可知，我們必須先找到一個共通量，才能把它們加起來。

案例 1-15 中用的方法是把 mile 轉爲 km，或是把 km 轉爲 mile。同樣地，我們也可把$\frac{1}{2}$化爲$\frac{1}{3}$的類型，或是把$\frac{1}{3}$化爲$\frac{1}{2}$的類型。兩種轉化都可以，但一定要有轉化，否則無法進行運算。不過，現在我們面對的問題比 mile 與 km 的問題較爲複雜。根據分數的定義，我們要先把“1”分成若干等份，然後再取若干等份的大小；但現在即使我們把“1”分爲兩等份（或三等份）也看不出怎樣選取$\frac{1}{3}$（或$\frac{1}{2}$），所以我們可用一個折衷的辦法：我們把“1”分成很多等份，數目多到能讓我們一眼便看出$\frac{1}{2}$和$\frac{1}{3}$的大小。容易看出，所需等份數目爲分母相乘的乘積（注意：不需通分母，即不一定將等份數目作爲分母的最小公倍數）。

考慮 $\frac{1}{2}=\frac{1\times 3}{2\times 3}=\frac{3}{6}$ 和 $\frac{1}{3}=\frac{1\times 2}{3\times 2}=\frac{2}{6}$，因此，它們便有一個共同單位“$\frac{1}{6}$”。所以，$\frac{1}{2}+\frac{1}{3}=\frac{3}{6}+\frac{2}{6}=\frac{5}{6}$。

在這裡，讓我們再回顧一下這個加法的意義：在開始的時候，由於我們把 $\frac{1}{2}$，$\frac{1}{3}$ 等分數看成是數目，所以兩個數目的大小相加，合併起來仍是數目的大小。

一般而言，對於同分母分數$\frac{a}{p}$和$\frac{b}{p}$相加就很簡單，即有$\frac{a}{p}+\frac{b}{p}=\frac{a+b}{p}$。對於異分母分數，$\frac{a}{b}$和$\frac{c}{d}$相加，透過“通分”（利用擴分得出共通的分母）就可以把它們變成同分母的分數：$\frac{ad}{bd}$

和 $\dfrac{bc}{bd}$ 。把它們加起來就是 $\dfrac{a}{b}+\dfrac{c}{d}=\dfrac{ad+bc}{bd}$ 。

這些雖然是推論出來的結果，但有些書把它看成定義也不足爲奇。因爲按照 Landau 的做法，$((a, b)/\sim) + ((c, d)/\sim) = (ad + bc, bd)/\sim$ （當然以上各式中的分母皆不等於 0）。

再看一個例子：

【案例 1-17】 $\dfrac{5}{6}+\dfrac{3}{4}=?$

分析：在處理這些問題時，我們通常會立刻想到通分找分母的最小公倍數（爲 12）。不過，通分母並非必須。這是因爲運算方法若經過數學處理後，應該達到一個盡量不用思考的地步。通分母不但要思考，而且有很多學生是不懂得通分母的。在美國，學生在初二、初三便接觸這些概念，但即便到高一、高二年級，仍有很多學生未能完全掌握。基礎的教學是要學生在操作問題上不用思考，因此我們只需把分母相乘來通分就可以了。如

$$\frac{5}{6}+\frac{3}{4}=\frac{5\times4}{6\times4}+\frac{6\times3}{6\times4}=\frac{20}{24}+\frac{18}{24}=\frac{38}{24}=\frac{2\times19}{2\times12}=\frac{19}{12}\text{ 。}$$

這裡需要注意的是，最後相加的結果是需要約分的。

對於分數加法的定義：

$$\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{ad+bc}{bd}\quad(\mathrm{b, d}\neq 0)$$

從數學觀點來看，以上是唯一正確的分數加法法則。通分母只是有時用到的一個小技巧，即如果存在有某整數 k，使得

$k=mb$ 而且 $k=nd$，那麼，把原分數的分母變爲 k，則有：

$$\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{ma}{mb}+\frac{nc}{nd}=\frac{ma+nc}{k}\text{ 。}$$

這裡 k 是 b 與 d 的公倍數，不需要是它們的最小公倍數，用最小公倍數來通分母只是一個小技巧。不過，現時的數學教科書常常把用最小公倍數來通分母作爲異分母的分數加法的唯一方法，對小學生來說，這是很容易做錯也比較麻煩的。因爲會涉及質因數的分解，首先，既要找出共同質因數，質因數分解也是件難事。分母若太大，即使運用計算器也難以應付。

4. 分數乘法

（1）整數乘分數的意義

【案例 1-18】 圖 1-14 中有 4 個正方形，每個正方形爲 1 個面積單位，問：陰影部分的面積是多少？

分析：可以看出：陰影部分的面積是 $\frac{3}{4}$ 的 4 倍。這是用 1 個正

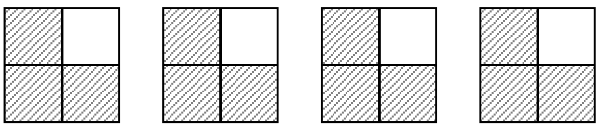


圖 1-14 整數乘分數

方形的 $\frac{3}{4}$ 作爲度量單位元去度量陰影部分，4 是得到的度量次數（量數）。

即 $\frac{3}{4}+\frac{3}{4}+\frac{3}{4}+\frac{3}{4}=\frac{3+3+3+3}{4}=\frac{3\times 4}{4}=3$，

由於 $\frac{3}{4}+\frac{3}{4}+\frac{3}{4}+\frac{3}{4}$ 可以簡寫爲 $\frac{3}{4}\times 4$ 或 $4\times\frac{3}{4}$，

所以 $\frac{3}{4}\times 4=\frac{3\times 4}{4}=3$ 或 $4\times\frac{3}{4}=\frac{4\times 3}{4}=3$。

再看圖 1-14，我們還可以說陰影部分的面積是 4 的 $\frac{3}{4}$。這是把 4 個正方形視爲一個整體去度量陰影部分，$\frac{3}{4}$ 是得到的度量次數（量數）。所以，4 的 $\frac{3}{4}$ ＝ $\frac{3}{4}$ 的 4 倍。即

$$4\text{ 的 }\frac{3}{4}=\frac{3}{4}\times 4\text{ 或 }4\times\frac{3}{4}\text{。}$$

因此，乘法算式 $4\times\frac{3}{4}$（也可以寫成 $\frac{3}{4}\times 4$）有兩種意義：既可以表示 4 的 $\frac{3}{4}$，也可以表示 $\frac{3}{4}$ 的 4 倍。

（2）分數乘分數的意義

圖 1-15 中大長方形的面積是 1 個面積單位，其中斜線的部分是它的 $\frac{3}{4}$，陰影部分是斜線部分的 $\frac{1}{4}$。問：陰影部分的面積是多少？

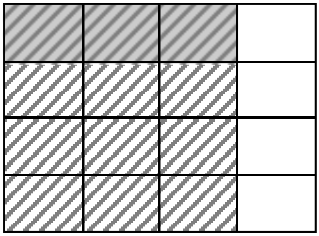


圖 1-15 分數乘以分數的意義

事實上，這個數學問題，就是求$\frac{3}{4}$的$\frac{1}{4}$是多少。所以，要用乘法求這兩個分數的積。

從圖 1-15 可以看出：陰影部分是長方形的$\frac{3}{16}$。

$$\frac{3}{4}\times\frac{1}{4}=\frac{3}{16} \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\ ①$$

這個計算結果是依靠圖形直觀“看”出來的。如果算，應該怎麼算呢？這就要求創造一個演算法過程，合乎情理地溝通算式①兩邊的內在聯繫。學生是有能力進行這個演算法過程的再創造的：

$$\frac{3}{4}\times\frac{1}{4} = \frac{3\times 1}{4\times 4} = \frac{3}{16}$$

再看看圖 1-16 中的長方形，其中斜線部分是它的$\frac{1}{4}$，陰影部分是斜線部分的$\frac{3}{4}$。陰影部分的面積是多少？

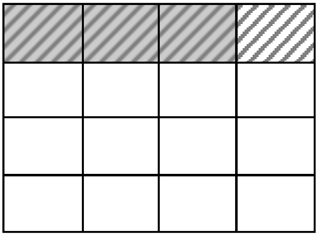


圖 1-16 分數乘以分數

同理，此題要求 $\frac{1}{4}$ 的 $\frac{3}{4}$ 是多少，這也是做乘法運算，也會發現：$\frac{1}{4}\times\frac{3}{4} = \frac{1\times 3}{4\times 4} = \frac{3}{16}$。

因此，乘法算式 $\frac{1}{4}\times\frac{3}{4}$（也可以寫成$\frac{3}{4}\times\frac{1}{4}$）也有兩種意義：既可以表示 $\frac{1}{4}$ 的 $\frac{3}{4}$，也可以表示 $\frac{3}{4}$ 的 $\frac{1}{4}$。

分數乘法運算最早見於中國古代的《九章算術》。該書稱分數乘法爲乘分，其法則是："母相乘爲法，子相乘爲實，實如法而一。"翻譯過來便是：分母相乘作積的分母，分子相乘作積的分子。用現代的數學符號可表示爲：

$$\frac{a}{b}\times\frac{c}{d}=\frac{ac}{bd}$$

（3）分數乘法法則

由以上探討分數乘分數的意義，可知兩個分數相乘就是把它們的分子、分母分別相乘作積的分子和分母。

分數乘法中有帶分數的，一般先把帶分數化成假分數，然

後相乘。

【案例 1-19】　$4\frac{1}{5}\times 6\frac{2}{3}=\frac{21}{5}\times\frac{20}{3}=\frac{21\times 20}{5\times 3}=28$

分數乘法中有一個因數是整數的，可以把整數看成分母是 1 的假分數，再把整數和分數的分子相乘。

【案例 1-20】　$7\times\frac{5}{6}=\frac{7\times 5}{6}=\frac{35}{6}=5\frac{5}{6}$

由於分數乘法是分別將分子、分母的整數相乘從而得出答案，因此，整數乘法的運算定律也適用於分數乘法：

乘法交換律：$\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}=\frac{c}{d}\cdot\frac{a}{b}$

乘法結合律：$\left(\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}\right)\cdot\frac{e}{f}=\frac{a}{b}\cdot\left(\frac{c}{d}\cdot\frac{e}{f}\right)$

乘法分配律：$\left(\frac{a}{b}+\frac{c}{d}\right)\cdot\frac{e}{f}=\frac{a}{b}\cdot\frac{e}{f}+\frac{c}{d}\cdot\frac{e}{f}$

或 $\frac{e}{f}\cdot\left(\frac{a}{b}+\frac{c}{d}\right)\cdot=\frac{e}{f}\cdot\frac{a}{b}+\frac{e}{f}\cdot\frac{c}{d}$

（4）倒數的意義

掌握了分數乘法的計算方法後，我們同樣能夠發現下面的乘法算式：

$\frac{1}{2}\times 2=1$，　$\frac{2}{3}\times\frac{3}{2}=1$，　$\frac{3}{4}\times\frac{4}{3}=1$，　$\frac{4}{5}\times\frac{5}{4}=1$，

$\frac{5}{6}\times\frac{6}{5}=1$，　$\frac{6}{7}\times\frac{7}{6}=1$，　$\frac{7}{8}\times\frac{8}{7}=1$。

基於這些特殊的乘法算式，也就引出一個重要的概念——倒數。如果兩個數的乘積是 1，那麼我們稱其中一個數是另一個數的倒數。例如，$\frac{1}{2}$ 的倒數是 2，2 的倒數是 $\frac{1}{2}$，我們也說 2 與 $\frac{1}{2}$ 互爲倒數。

那麼，0 爲甚麼沒有倒數？這是一個有趣的問題。用上述的想法來理解，$a \div 0$ 其實可以轉化爲求

$$0 \times x = a \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \ (*)$$

的解。若 $a \neq 0$，則 (*) 無解。故我們一般說 $\frac{a}{0}$（當 $a \neq 0$）沒法定義（undefinable）。若 $a = 0$，則 (*) 有無窮解（更確切地說，解爲全體實數）。因此，有些教科書上說，$\frac{0}{0}$ 不能確定（undeterminable）。雖然在實際教學中，無論 $a = 0$ 或 $a \neq 0$，$\frac{a}{0}$ 均沒有定義（所謂不存在），但當中的情況是有着細微的分別。

對於分數乘法的意義，湯斯托爾（C. Tonstall, 1474-1559）在 1522 年發表的用拉丁文寫的算術書中，說明 $\frac{1}{5} \times \frac{1}{5}$ 時，先將正方形垂直地均分成 5 個長條，然後在水平地均分成 5 個長條，如圖 1-17 所示，這樣就分成了 25 個小正方形，其中每一個小正方形即：$\frac{1}{5} \times \frac{1}{5} = \frac{1}{25}$

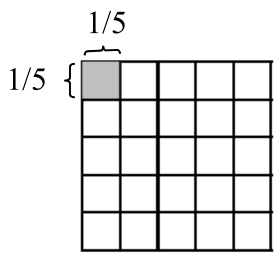


圖 1-17 $\frac{1}{5} \times \frac{1}{5}$ 的意義

5. 分數除法

由於（Q，+，–）是域，分數（非零有理數）除以非零分數（有理數）必定可行，即結果爲另一分數。因此，分數除法沒有餘數的問題，這也是不少學生往往從整數除法轉換過來不習慣的地方。

（1）分數除法的意義

整數除法的意義是：“已知兩個因數的積與其中的一個因數，求另一個因數的運算”。例如：每袋麵粉的重量是 250 克，3 袋麵粉共重多少克？如果 3 袋麵粉共重 750 克，平均每袋麵粉多少克？每袋麵粉重 250 克，750 克麵粉有多少袋？根據整數乘除法的意義，可以分別列出算式：$250 \times 3 = 750$ (克)，$750 \div 3 = 250$ (克)，$750 \div 250 = 3$ (袋)。如果用“千克”做單位，寫成分數形式，上面三道算式可以又分別寫成：

$\frac{1}{4} \times 3 = \frac{3}{4}$ (千克)，　$\frac{3}{4} \div 3 = \frac{1}{4}$ (千克)，　$\frac{3}{4} \div \frac{1}{4} = 3$ (袋)。

顯然，儘管兩個除法算式中的整數都變成了分數，但是我們只改變了數的形式，問題中涉及的數量關係並沒有改變，它們的意義仍然是“已知兩個因數的積與其中的一個因數，求另一個因數的運算”。

再看下面的例子：果園有果樹 900 棵，其中桃樹有 360 棵。桃樹的棵數是果樹總棵樹的幾分之幾？果園有果樹 900 棵，桃樹占果樹總棵數的 $\frac{2}{5}$，果園有桃樹多少棵？果園有桃樹 360 棵，桃樹占果樹總棵數的 $\frac{2}{5}$，果園有果樹多少棵？不難看出，上面三個問題只是把已知數和未知數交換了位置，列算式分別是：

$$360\div 900=\frac{2}{5}\text{，}\quad 900\times\frac{2}{5}=360\ (\text{棵})\text{，}\quad 360\div\frac{2}{5}=900\ (\text{棵})\text{。}$$

在這兩個用除法計算的問題中，它們的實際意義與前面分味精的三個問題有些區別，但從數學的角度來看，其實都是“已知兩個因數的積與其中的一個因數，求另一個因數的運算”。

綜合上面的分析，我們可以說，分數除法的意義與整數除法的意義是相同的，都是“已知兩個因數的積與其中的一個因數，求另一個因數的運算”。

（2）分數除法的計演算法則

分數除法的計演算法則是：甲數除以乙數（0 除外），等於甲數乘乙數的倒數。這個法則通常被稱爲“顛倒相乘”。那麼，爲甚麼要“顛倒相乘”呢？我們可以從以下幾個方面來理解其中的道理。

1） 根據分數除法的意義來理解。“$\frac{8}{15}\div\frac{4}{5}$”是表示一個數的 $\frac{4}{5}$ 是 $\frac{8}{15}$，求這個數是多少。因爲，這個數的 $\frac{4}{5}$ 是 $\frac{8}{15}$，也就是它的 4 個 $\frac{1}{5}$ 是 $\frac{8}{15}$，所以，它的 $\frac{1}{5}$ 是“$\frac{8}{15}\div 4$”，即“$\frac{8}{15}\times\frac{1}{4}$”。要求這個數，即求它的 5 個 $\frac{1}{5}$ 是多少，則這個數是：$\frac{8}{15}\times\frac{1}{4}\times 5=\frac{8}{15}\times\frac{5}{4}$。因此，$\frac{8}{15}\div\frac{4}{5}=\frac{8}{15}\times\frac{5}{4}$。

2） 從分數乘、除法之間的關係去理解。因爲 $\frac{2}{3}\times\frac{4}{5}=\frac{8}{15}$，所以

$\frac{8}{15}\div\frac{4}{5}=\frac{2}{3}=\frac{8\div4}{15\div5}$。根據分數的基本性質，$\frac{8\div4}{15\div5}=$ $\frac{8\div4\times5\times4}{15\div5\times5\times4}=\frac{8\times5}{15\times4}=\frac{8}{15}\times\frac{5}{4}$，因此，$\frac{8}{15}\div\frac{4}{5}=\frac{8}{15}\times\frac{5}{4}$。

3）根據商不變的規律來理解。$\frac{8}{15}\div\frac{4}{5}=(\frac{8}{15}\times5)\div(\frac{4}{5}\times5)=$ $\frac{8}{15}\times5\div4=\frac{8}{15}\times\frac{5}{4}$；或 $\frac{8}{15}\div\frac{4}{5}=(\frac{8}{15}\times\frac{5}{4})\div(\frac{4}{5}\times\frac{5}{4})=\frac{8}{15}\times$ $\frac{5}{4}$。

可見，由於引進了分數，乘除法的意義都得到了擴展，除法和乘法可以在一定的條件下相互轉化。

對於分數除法的書及研究如汗牛充棟，但如上面談等分和包含除的情況，大部分這些表述都是嘗試從現實生活情境（包括畫圖法）去展示分數除法的意義，其數學本質仍是乘法的逆運算。正如伍鴻熙教授（1999）所說：

> “$\dfrac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}}$ 是爲某數 A，使得 $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}\times A$。我們可以畫很多圖來解釋，但對除法來說，無論怎樣去解釋，歸根究底是對上述方程求解；所以倒不如老老實實地用這個方法來定義。”

6. 有理數的四則運算與代數結構

20 世紀 60 年代西方新數學（modern math）運動時期因受了布爾巴基（Bourbaki）學派的影響，當時的數學教學十分着重數學結構。他們開宗明義以“數學結構”去貫串整個數學，

將數學建立在代數結構、序結構和拓撲結構等三個主要結構（mother-structures）及其衍生的複合結構、多重結構和混合結構之上。時至今日，雖然重視程度已減輕，但不可否認，以數字而言，由整數到有理數，到實數及複數，數字已由一個實際物體漸漸變成一隻“人造物”。數字不一定有看得到的實質意義（如 π^e 是甚麼？），但當中的（代數）結構，反而變得重要。

正分數加零再加負分數就構成了有理數，將正分數的四則運算拓展到有理數，就形成一個帶有加、減、乘和除運算的有理數集。

有理數集是一個域，即在其中可進行四則運算（0 作除數除外），而且對於這些運算，以下的運算律成立（a、b、c 等都表示任意的有理數）：

① 加法的交換律 $a + b = b + a$；

② 加法的結合律 $a + (b + c) = (a + b) + c$；

③ 存在數 0，使 $0 + a = a + 0 = a$；

④ 對任意有理數 a，存在一個加法逆元，記作 $-a$，使 $a + (-a) = (-a) + a = 0$；

⑤ 乘法的交換律 $ab = ba$；

⑥ 乘法的結合律 $a(bc) = (ab)c$；

⑦ 分配律 $a(b + c) = ab + ac$；

⑧ 存在一個異於 0 的乘法單位 1，使得對任意有理數 a，$1a = a1= a$；

⑨ 對於不爲 0 的有理數 a，存在乘法逆元 $1/a$，使 $a\,(1/a) = (1/a)\,a = 1$；

⑩ $0a = 0$。

此外，有理數是一個序域，即在其上存在一個次序關係≤。

有理數還是一個阿基米德域，即對有理數 a 和 b，$a\geq 0$，$b>0$，必可找到一個自然數 n，使 $nb>a$。由此不難推知，不存在最大的有理數。

對於有理數的由來，還有段歷史。中國在近代翻譯西方科學著作，依據日語中的翻譯方法，以訛傳訛，把形如 $\frac{q}{p}$（p，$q\in\mathbf{Z}$ 且 $p\neq 0$）的數譯成了"有理數"。這個詞是來源於古希臘，其英文詞根爲 ratio，就是比率的意思（這裡的詞根是英語中的，希臘語意義與之相同）。所以這個詞的意義也很明顯，就是整數的"比"。與之相對，"無理數"就是不能精確表示爲兩個整數之比的數，而並非沒有道理。

三、小數

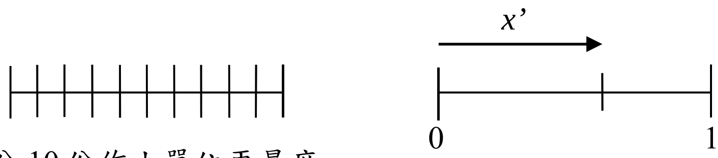
1. 小數的意義與表達方式

（1）小數的意義

小數的引入是用來描述一些非整數的數值。設有一數 x，其值介於兩個整數之間。那麼如何精確地描述其大小呢？

假若 x 滿足條件 $87\leq x<88$，則可將它寫成 $x=87+x'$，其中 $0\leq x'<1$。所以只需集中討論數 x' 就可以了。現在我們採取比較直觀的方法，即從考慮 x' 的長度來描述其大小。怎樣去度量一段長度爲 x' 的線段呢？這個方法在長度一節（第四章）會有說明，即是用一個單位長度去度量已給的線段。若不能以整數倍的單位長度去量盡該線段，則將單位長度平分爲 10 等份，並以一小等份作爲新的單位去度量剩餘的部份，如圖 1-18

所示。



分 10 份作小單位再量度

圖 1-18 小數的意義

若新的單位仍不能以整數倍量盡剩餘部份，則再將新單位平分爲 10 等份，並以這一更小的等份作爲第三個新單位繼續去度量，如此類推，直至量盡爲止。其過程可用下列算式表達：

$$x' = a_1\left(\frac{1}{10}\right) + x'' ,\qquad 0 \le x'' < \frac{1}{10} ，a_1 \text{ 爲整數，} 0 \le a_1 \le 9 \text{ 。}$$

$$x'' = a_2\left(\frac{1}{10^2}\right) + x^{(3)} ,\qquad 0 \le x^{(3)} < \frac{1}{10^2} ，a_2 \text{ 爲整數，} 0 \le a_2 \le 9 \text{ 。}$$

$$x^{(3)} = a_3\left(\frac{1}{10^3}\right) + x^{(4)} ,\qquad 0 \le x^{(4)} < \frac{1}{10^3} ，a_3 \text{ 爲整數，} 0 \le a_3 \le 9 \text{ 。}$$

$$x^{(4)} = a_4\left(\frac{1}{10^4}\right) + x^{(5)} ,\qquad 0 \le x^{(5)} < \frac{1}{10^4} ，a_4 \text{ 爲整數，} 0 \le a_4 \le 9 \text{ 。}$$

$$\cdots$$

其中 $\frac{1}{10^2}$ ，$\frac{1}{10^3}$ 等分別爲 $\frac{1}{10}\times(\frac{1}{10})$ ，$\frac{1}{10}\times(\frac{1}{10}\times(\frac{1}{10}))$ 等的縮寫。

綜合以上各式，便可得出 x' 的表達方式，例如：

$$x' = a_1(\frac{1}{10}) + a_2(\frac{1}{10^2}) + a_3(\frac{1}{10^3}) + a_4(\frac{1}{10^4}) + x^{(5)}$$

其中 $0 \le x^{(5)} < \dfrac{1}{10^4}$，而 a_1, a_2, a_3, a_4 爲整數，在 0 與 9 之間。

或另一種方式表達 x'：

$$x' = \frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{10^2} + \frac{a_3}{10^3} + \frac{a_4}{10^4} + x^{(5)}$$

其中 $0 \le x^{(5)} < \dfrac{1}{10^4}$，而 a_1, a_2, a_3, a_4 爲整數，在 0 與 9 之間。

（2）小數的表達方式

習慣上，我們用如下方法來表達 x'：

$$x' = 0.a_1a_2a_3a_4...$$

這就是所謂 x' 的小數表達式。

以上的方法是採取每次使用更小的單位去度量，直至量盡爲止。既然如此，與其每次使用更小的單位，不妨先將每式擴大 10 倍來量；這樣便把原來在 0 與 1 之間的數，擴大成 0 與 10 之間的數。也就是說，將 10 乘上方程 $x' = a_1\left(\dfrac{1}{10}\right) + x''$ 的兩邊，得 $10x' = a_1 + \bar{x}''$，其中 $\bar{x}'' = 10x''$，則有 $0 \le \bar{x}'' < 1$。按同樣的方式處置其他上面的方程，故有：

$10x' = a_1 + \bar{x}''$，　$0 \le \bar{x}'' < 1$，　a_1 爲整數，$0 \le a_1 \le 9$。

$10\bar{x}'' = a_2 + \bar{x}^{(3)}$，　$0 \le \bar{x}^{(3)} < 1$，　a_2 爲整數，$0 \le a_2 \le 9$。

$10\overline{x}^{(3)} = a_2 + \overline{x}^{(4)}$， $0 \le \overline{x}^{(4)} < 1$， a_3 爲整數，$0 \le a_3 \le 9$。

$10\overline{x}^{(4)} = a_2 + \overline{x}^{(5)}$， $0 \le \overline{x}^{(5)} < 1$， a_4 爲整數，$0 \le a_4 \le 9$。

這樣的度量是否與前一次不同呢？現嘗試分析如下：

$$
\begin{aligned}
10x' &= a_1 + \overline{x}'' && 0 \le \overline{x}'' < 1 \\
x' &= \frac{a_1}{10} + \frac{\overline{x}''}{10} && 0 \le \frac{\overline{x}''}{10} < \frac{1}{10} \\
&= \frac{a_1}{10} + \frac{1}{10}\left(\frac{a_2}{10} + \frac{\overline{x}^{(3)}}{10}\right) \\
&= \frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{10^2} + \frac{\overline{x}^{(3)}}{10^2} && 0 \le \frac{\overline{x}^{(3)}}{10^2} < \frac{1}{10^2} \\
&= \frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{10^2} + \frac{1}{10^2}\left(\frac{a_3}{10} + \frac{\overline{x}^{(4)}}{10}\right) \\
&= \frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{10^2} + \frac{a_3}{10^3} + \frac{\overline{x}^{(4)}}{10^3} && 0 \le \frac{\overline{x}^{(4)}}{10^3} < \frac{1}{10^3} \\
&= \frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{10^2} + \frac{a_3}{10^3} + \frac{1}{10^3}\left(\frac{a_4}{10} + \frac{\overline{x}^{(5)}}{10}\right) \\
&= \frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{10^2} + \frac{a_3}{10^3} + \frac{a_4}{10^4} + \frac{\overline{x}^{(5)}}{10^4} && 0 \le \frac{\overline{x}^{(5)}}{10^4} < \frac{1}{10^4}
\end{aligned}
$$

這裡的 $0 \le \dfrac{\overline{x}^{(5)}}{10^4} < \dfrac{1}{10^4}$ 不就是與前式的 $0 \le x^{(5)} < \dfrac{1}{10^4}$ 等價嗎？所以，這其實是同一種東西的不同寫法。

2. 分數與循環小數

一個既約分數的分母，如果只含有質因數 2 和 5，那麼這個分數可以化成有限小數。因爲，既約分數的分母裡只含有質因數 2 和 5，因此這個分數的分母就能化成 10 的正整數次冪，

也就是該分數能化成十進分數，因而就能化成有限小數。

如果分數 $\frac{p}{q}$ 不能化成有限十進制小數，那麼通過不斷地作除法，能把該分數表示爲一個無限的十進制小數。在除的過程中必然每次都有一個非零的餘數，否則這十進制小數是有限小數。在這個過程中出現的所有不同餘數將是 1 和 $q-1$ 之間的整數，所以最多只能有 $q-1$ 個不同的餘數值，這意味着，最多能除 q 次，某個餘數 k 將第二次出現。但由此隨後而來的所有餘數，將按照餘數 k 第一次出現的同樣次序重複。這說明這個有理數的十進制小數表示式是循環的，並且開始出現有限個數字，隨後同樣的一個數字或一組數字將無限次地再現。例如，$\frac{1}{6}=0.16666666\ldots$，$\frac{1}{7}=0.142857142857\ldots$，$\frac{1}{11}=0.090909\ldots$，$\frac{122}{1100}=0.11090909\ldots$，$\frac{11}{90}=0.12222222\ldots$，等。而那些能表示爲有限小數的有理數，也可以認爲是一個循環小數，只是它在有限個數碼之後，無限次地重複數 0。順便指出，有一些循環小數，在循環部分的前面有一個非循環的部分。

反過來，任何一個有限小數也能化成一個分數；任何一個無限的循環小數，也一定可以轉化成一個分數。換言之，任何實數只可能有以下三種小數表達方式：其一，有限小數；其二，循環小數；其三，無限不循環小數。前兩者，必爲有理數，第三是無理數。現在問題在於，把一個循環小數轉化成一個分數卻是一件十分不容易的事情。

（1）純循環小數化成分數

【案例 1-21】 將純循環小數 $0.\dot{3}$ 化成分數。

分析：由於循環小數是無限的，人們就想出了一個十分有效的辦法：

設 $x=0.\dot{3}=0.333\ldots$，那麼 $10x=3.333\ldots$

將兩式兩邊同時作減法運算：

$$
\begin{aligned}
10x &= 3.333\ldots \\
-)\quad x &= 0.333\ldots \\
\hline
10x-x &= 3.333\ldots-0.333\ldots \\
9x &= 3 \\
x &= \frac{3}{9}
\end{aligned}
$$

因此，

$$0.\dot{3}=\frac{3}{9}=\frac{1}{3}\text{。}$$

採用同樣的方法，我們將下面的一些純循環小數化成了分數：

$$
\begin{aligned}
0.\dot{3} &= \frac{3}{9}=\frac{1}{3} \\
0.\dot{6} &= \frac{6}{9}=\frac{2}{3} \\
0.\dot{1}\dot{2} &= \frac{12}{99}=\frac{4}{33} \\
0.\dot{5}\dot{3} &= \frac{53}{99} \\
0.\dot{2}4\dot{3} &= \frac{243}{999}\left(=\frac{9}{37}\right)
\end{aligned}
$$

比較等號左右兩邊的數，我們似乎找到了一種能直接將純

循環小數化成分數的辦法。

（2）混循環小數化成分數

【案例 1-22】　將混循環小數 $0.1\dot{3}$ 化成分數。

分析：繼續假設　$x=0.1\dot{3}=0.1333\ldots$，那麼

$$10x = 1.333\ldots$$
$$100x = 13.333\ldots$$

將後兩式兩邊同時作減法運算：

$$\begin{aligned} 100x &= 13.333\ldots \\ -)\quad 10x &= 1.333\ldots \\ \hline 100x-10x &= 13.333\ldots-1.333\ldots \\ 90x &= 13-1 \\ x &= \frac{13-1}{90} \end{aligned}$$

因此，

$$0.1\dot{3}=\frac{13-1}{90}=\frac{2}{15}\text{。}$$

我們再看一例：

【案例 1-23】　將混循環小數 $0.12\dot{5}\dot{3}$ 化成分數。

分析：設 $x=0.12\dot{5}\dot{3}=0.125353\ldots$，那麼

$$100x = 12.5353\ldots$$
$$10000x = 1253.5353\ldots$$

將後面兩式兩邊同時作減法運算：

$$\begin{array}{rrl} & 10000x &= 1253.5353\ldots \\ -) & 100x &= 12.5353\ldots \\ \hline \end{array}$$

$$10000x - 100x = 1253.5353\ldots - 12.5353\ldots$$

$$9900x = 1253 - 12$$

$$x = \frac{1253-12}{9900}$$

因此，

$$0.12\dot{5}\dot{3} = \frac{1253-12}{9900} = \frac{1241}{9900}\text{。}$$

採用同樣的方法可將下面的一些小數化成分數：

$$0.1\dot{3} = \frac{13-1}{90}(=\frac{2}{15})$$

$$0.12\dot{5}\dot{3} = \frac{1253-12}{9900}(=\frac{1241}{9900})$$

$$0.124\dot{3}\dot{5} = \frac{12435-124}{99000}(=\frac{12311}{99000})$$

$$0.12\dot{4}3\dot{5} = \frac{12435-12}{99900}(=\frac{4141}{33300})$$

$$0.124\dot{3}05\dot{7} = \frac{1243057-124}{9999000}(=\frac{1243933}{9999000})$$

由此，我們可以將循環小數化成分數的規律總結如下：

（1） 將純循環小數改寫成分數，分子是一個循環節的數字組成的數；分母各位數字都是 9，9 的個數與循環節中的數字的個數相同。

（2） 將混循環小數改寫成分數，分子是不循環部分與第一個循環節連成的數字組成的數，減去不循環部分數字組成的數

之差；分母的頭幾位數字是 9，末幾位數字是 0，9 的個數與循環節的數字相同，0 的個數與不循環部分的數字相同。

之所以能這樣處理，回到數學的本質，其實是因爲我們先“假設”了極限的收斂。在這裡，$0.\dot{3}$ 其實是一個數列的極限：

$$\lim_{n\to\infty} a_n$$

其中 $a_1 = 0.3$，$a_2 = 0.33$，…，$a_n = 0.\underbrace{333...3}_{n\text{個}}$。對於上面【案例 1-21】的做法，是因爲設 $l = \lim_{n\to\infty} a_n$，由於 $10l - l = 3$，故而有 $l = \frac{1}{3}$。

在這當中是已經假設 $l = \lim_{n\to\infty} a_n$ 存在，即數列 $\{a_n\}$ 收斂。而這事實上是對的（因數列 $\{a_n\}$ 有上界且單調遞增），但我們仍要留意這些極限運算是不能輕率對待的。其後我們可見【案例 1-25】對此的討論。

3. 小數的乘除

（1）小數乘法

由於小數是十進分數，因此小數乘法可以化成分數乘法來計算。例如：

$$\begin{aligned} 4.26 \times 0.083 &= \frac{426}{100} \times \frac{83}{1000} \\ &= \frac{426 \times 83}{100 \times 1000} \\ &= \frac{35358}{100000} \\ &= 0.35358 \text{。} \end{aligned}$$

由此可知，兩個小數相乘，可以先按照整數乘法計算，再在所得的積裡點上小數點，使積裡小數部分的位數等於兩個因數裡小數位之和。例如：

$$\begin{array}{r} 4.26 \\ \times\ 0.083 \\ \hline 1278 \\ 3408 \\ \hline 0.35358 \end{array}$$

（2）小數除法

小數除法有兩種情況：

1）除數是整數的除法，可以轉化爲分數除法。例如：

$$12.78 \div 9 = \frac{1278}{100} \div 9 = \frac{1278 \div 9}{100} = \frac{142}{100} = 1.42 \text{ 。}$$

由此可知，小數除以整數，可以先按照整數除以整數的方法計算，除到被除數的哪一位，商就寫在哪一位的上面。因此，商的小數點要同被除數的小數點對齊。例如：

$$\begin{array}{r} 1.42 \\ 9\overline{)12.78} \\ 9 \\ \hline 37 \\ 36 \\ \hline 18 \\ 18 \\ \hline 0 \end{array}$$

如果在被除數的小數末尾，無論添上多少個零都不能除盡，那麼商的小數位數就不是有限的。例如，$14.3 \div 3 = 4.7666\ldots$；

$1 \div 7 = 0.142857142\ldots$。

2）除數是小數的除法，可以根據小數點移位的性質，將被除數、除數同時擴大若干倍，它們的商不變的規律進行運算。因此，小數除以小數和整數除以小數的計算，都可以先把被除數和除數同時擴大若干倍，使除數變成整數，再按小數除以整數的方法進行計算。例如：

$$1.7 \div 0.8 = 17 \div 8 = \frac{17000}{1000} \div 8 = \frac{17000 \div 8}{1000} = \frac{2125}{1000} = 2.125$$ 。

4. 小數與實數系

在這裡，我們通過對幾個例子的分析，來看小數和實數系的關係。

【案例 1-24】　一般人們會覺得分數比小數準確，如$\frac{1}{3}$比 0.33 準確，學習圓周率時，爲甚麼實際上$\frac{22}{7}$不比 3.14 準確？

分析：科學計算的結果，一般要用小數表示，如果沒有特別說明，就保留小數點後兩位。對於 $\frac{1}{3}$，$\frac{1}{6}$，$\frac{1}{7}$,把它們化成小數，分別是 $0.333\ldots, 0.166\ldots, 0.142857\ldots, \ldots$，四捨五入保留兩位小數後，分別得到 0.33，0.17 和 0.14，它們只是近似值。在這裡$\frac{1}{3}$是精確值，而 0.33 是近似值，故而給學生一個印象：$\frac{1}{3}$比 0.33 準確。於是，當他們學習圓周率π的時候，會錯認爲$\frac{22}{7}$比 3.14 精確。但由於π是無理數，不能化成分數$\frac{q}{p}$（p，q 是自然數）的形式，也就沒有一個所謂準確的分數或者小數的表達

方式。換言之，$\frac{22}{7}$（祖沖之的疏率），$\frac{157}{50}$（祖沖之的密率），3.14 及 3.1415926 其實均不準確。究竟哪個較準確，實際上要依賴較精深的數學，如連分數逼近，才能確定。

【案例 1-25】 爲甚麼實數可以劃分爲有限小數、循環小數和無限不循環小數三類？

分析：實數包括無理數和有理數，而無理數是無限不循環小數。另外，有理數$\frac{q}{p}$（p 和 q 互質）可分爲兩種情況：一種情況是 p 只含 2 或 5 的質因數，這時$\frac{q}{p}$必是有限小數；另一種請情況是q包含有 2 和 5 以外其他質因數，則$\frac{q}{p}$是無限循環小數。故而，實數可劃分爲有限小數、循環小數和無限不循環小數。

關於循環小數，常常遇到的問題是，$0.\dot{9}$是否等於 1。在探討這個問題之前，我們先要瞭解數學上，何謂“=”？（又是涉及數學本質！）孩童學數，都會接觸到“1+1=2”這個入門級別的算式，可是，它爲甚麼會成立呢？

一位數學系教授問大一學生，1 + 1 是否等於 2？左邊有三個符號，右邊有一個符號，怎麼可能相等？他還補充說，兩個 5 角的硬幣在體積和重量上均不等於一個 1 元的硬幣。如果認爲這樣的說法是強詞奪理，我們看現實生活中的投幣機器就知道了。有些投幣機器（如自動售賣機，投幣電話等）只接受 1 元的硬幣，卻不認兩個 5 角的硬幣。所以，首先我們要問的應是“甚麼是‘=’”？

在數學上，我們可以簡單地認爲，兩個 5 角的硬幣與一個

1 元的硬幣在數值上是相等。於是，從數值的角度來看，1 + 1 就等於 2 了。此外，還有其他一些問題也涉及到對“=”的理解。在 1991 年，曾有位前線老師寫信給香港數理教育學會，詢問“$3:4$ 是否等於 $\frac{3}{4}$？ 50%是否等於 $\frac{1}{2}$”？嚴格來講，我們應該寫成“若 $m:n=3:4$，則 $\frac{m}{n}=\frac{3}{4}$”。起碼，我們能計算 $\frac{3}{4}+\frac{2}{5}$ 但一般不能對 $(3:4)+(2:5)$ 進行計算。

在數學上，其實“=”有不少意思，而且並不只局限於數字上的應用。其他比如，“$\frac{2}{3}=\frac{4}{6}$”背後的等價關係是“若 ad = bc，有 $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$”，而 $\frac{x^2-1}{x-1}=x+1$ 背後的等價關係是“對於 $x\in\mathbf{R}\backslash\{1\}$，有 $f(x)=g(x)$”，其中 $f(x)=\frac{x^2-1}{x-1}$ 及 $g(x)=x+1$。另外，矩陣、向量等也會用到“=”這個符號表示兩個對象間的等價關係。

因此，我們在理解“=”時，應注意其背後所表示的不同意義。再看下例：

【案例 1-26】　爲甚麼 $0.\dot{9}=1$？

分析：一般的解釋爲，設 A = $0.\dot{9}$=0.999…

$$\begin{array}{rrcl} & 10A & = & 9.999\ldots \\ -) & A & = & 0.999\ldots \\ \hline & 9A & = & 9 \end{array}$$

故 A=1。

這個解釋看上去十分合理，但仔細推敲，它其實涉及幾個問題。甚麼是“…”呢？在涉及“…”時，可以隨便進行四則

運算嗎？甚麼又是“=”？$0.\dot{9}$是實數嗎？又甚麼是實數呢？

首先由於對於無限小數（如前所述，我們把它們看作是數列的極限），無論是無限循環小數或無限不循環小數，均是有（上）界和單調遞增的，因此這些數列皆收斂，所以我們才可以進行一些四則運算，即若

$$\lim_{n\to\infty} a_n = L \text{，} \lim_{n\to\infty} b_n = M \text{，}$$

有

$$\lim_{n\to\infty}(a_n \pm b_n) = L \pm M \text{，} \lim_{n\to\infty}(ka_n) = kL \text{。}$$

故此，若涉及到極限，處理“=”就要小心，因爲本來“=”的概念是針對數學的，我們的解釋就要回到數學的本質上來。

至於$0.\dot{9}$是否“只是數列的極限”，而不是實數，那就要回到何謂實數了。簡單而言，若把 **R** 看成爲 **Q** 的拓撲完備化，沿着戴德金（Richard Dedekind, 1831-1916）及康托（Georg Cantor, 1845-1918）的工作，實數就是有理數數列的極限，所以實數和數列是分不開的。

在這個背景下，$0.\dot{9}$是否等於 1 其實就很清楚了。它與極限有關。從某個意義上來說，0.999…本來不應被簡單看成是數字。它其實是一個數列的極限，該數列爲：

$$\begin{aligned} t_1 &= 0.9 \\ t_2 &= 0.99 \\ t_3 &= 0.999 \\ &\cdots \\ t_n &= 0.\underbrace{9\ldots9}_{n\text{ 個}} \end{aligned}$$

顯然，對於任何 n，t_n 均不等於 1。$0.\dot{9}=1$ 其實可看成是 $\lim\limits_{n\to\infty} t_n=1$ 的簡寫。亦即，對於任何 n，雖然 $0.\underbrace{999\ldots9}_{n\text{個}}\neq 1$，但

$\lim\limits_{n\to\infty} 0.\underbrace{999\ldots9}_{n\text{個}}=1$。

所以，在這樣的情況下，"="不能脫離極限去理解。因爲至少我們不可以不假思索地如數字般進行四則運算。因此在某個意義上來講，"$\infty+\infty=\infty$"、"$\infty\times\infty=\infty$"等是沒有意義的。因爲"$\infty$"不是實數系的一元。不過，對"$\infty+\infty=\infty$"是存在這樣的定理：

若 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=\infty$，$\lim\limits_{n\to\infty} b_n=\infty$，且定義 $c_n=a_n+b_n$（其中 $n=1, 2, \ldots$），則有 $\lim\limits_{n\to\infty} c_n=\infty$。

但是，如果我們定義 $d_n=a_n-b_n$，即使有 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=\infty$，$\lim\limits_{n\to\infty} b_n=\infty$，我們也不能肯定 $\lim\limits_{n\to\infty} d_n$ 的趨勢。因此，我們也就不可以寫"$\infty-\infty=0$"。

四、負數

負數作爲一種實數，指正數的相反數。在實數範圍內，帶有性質符號"−"的數稱爲負數。負數與正數是在數的不斷擴充過程中出現的。人類在生產實踐中，隨着生產實際的複雜化和社會的發展，迫切需要度量有方向的量，要求用互爲相反的數表示前進與後退、向上與向下、盈與虧、增加與減少等實際問題中既有方向又有數值的量。這樣，在由整數集擴充到分數集的基礎上引入了新數——負數，相應的，原有的數就是正數。進而，分數集先後被擴充到有理數集、實數集等。

1. 負數的定義

如果$a<b$，那麼$a-b$在自然數範圍內就沒有意義，但數$c=b-a$確定存在。記$-c=a-b$，則稱之爲一個負數，它是$c+x=0$的唯一解。

在自然數內成立的 5 個法則在正負數（整數）中依然成立：

① 運算恆可進行，即$a+b$仍然爲整數；
② 單值性，$a+b$是唯一確定的；
③ 結合律成立：$(a+b)+c=a+(b+c)$；
④ 交換律成立：$a+b=b+a$；
⑤ 單調性律：若$b>c$，則$a+b>b+c$。

正負數（整數）的乘法具有下述特殊的性質：

① 運算恆可進行，即$a\times b$仍然爲整數；
② 單值性，$a\times b$是唯一確定的；
③ 結合律成立：$(a\times b)\times c=a\times(b\times c)$；
④ 交換律成立：$a\times b=b\times a$；
⑤ 乘法對加法的分配律：$a\times(b+c)=a\times b+a\times c$；
⑥ 若 $a>b$，則當 $c<0$，有 $a\times c<\mathrm{b}\times c$；當 $c>0$，有 $a\times c>\mathrm{b}\times c$。

學生學習負數時往往會出現種種困難，回顧負數的歷史，負數的瞭解和運算在歷史上殊不容易，我們也就不難理解學生的困難。有關負數的歷史，可參看附錄 3。

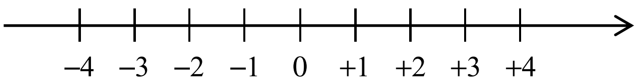
2. 負數與數軸

數軸亦稱數直線。它是數學的基本概念之一，指規定了原

點、方向和長度單位的直線。數軸的重要作用是用它上面的幾何點表示實數。這種表示的具體作法是按下面所述建立數軸上點的集合與實數集合的一一對應，並用點表示它對應的實數：

（1）原點 O 表示實數零。

（2）在原點的正向一側，與原點相距 1 個單位長度的點表示實數+1，與原點相距 2 個單位長度的點表示實數+2；在原點的負向一側，與原點相距 1 個單位長度的點表示實數–1，與原點相距 2 個單位長度的點表示實數–2 等。因此，我們也可借助數軸從幾何的角度來解釋負數：



另外，在現實世界中，溫度計零上、零下度數指示，商業資產負債表上的借方和貸方均爲負數概念提供了熟悉的直觀解釋。

（3）將表示兩個相鄰整數 a 與 $a+1$ 的點之間的線段分成 10 等份，依次用分點表示實數 $a+0.1$, $a+0.2$, … , $a+0.9$；此後，再將更鄰近的相鄰兩點 b 與 $b+0.1$ 之間的線段分成 10 等份，依次用分點表示實數 $b+0.01$, $b+0.02$, … , $b+0.09$，如此繼續下去，這樣就得到了零、正負整數與所有有限十進制小數的表示。無限循環十進制小數與無理數的表示可按（4）做出。

（4）對於任何無限循環十進制小數或無理數 x，取一個嚴格單調遞增的有限十進制小數序列 $a_1 < a_2 < ... < a_n < ...$ 與一個嚴格單調遞減的有限十進制小數序列 $b_1 > b_2 > ... > b_n > ...$，滿足：$\lim\limits_{n\to\infty}(b_n - a_n) = 0$，且對任何 $n \in \mathbf{N}$ 有 $a_n < x < b_n$，則必有惟

一的一點 X 在所有線段$[a_n, b_n]$上，這樣的點 X 表示無限循環十進制小數或無理數 x，數軸常常作爲一維坐標系或直線坐標系，數軸上的點的一維坐標就是它表示的數，點 A 的坐標爲 a，記爲 $A(a)$ 。

3. 負數的運算

引入負數後的一個優點是貫通了整數的加減運算，即加上一個正數就是減去它的相反數。創立負數後，減法運算就可以大膽地進行了，也就有了正負數（整數）範圍內的新加法運算（包括減法運算）。

（1）減去一個數等於加上這個數的相反數。即：

$$a - b = a + (-b) \text{ 。}$$

這可以根據差的定義來說明。

設 $x = a - b$，因減法是加法的逆運算，所以 $b + x = a$。

兩邊再加 $-b$，則有 $b + x + (-b) = a + (-b)$ ，

所以 $x = a + (-b)$ 。

因 $a - b$ 是唯一存在，所以 $a - b = a + (-b)$ 。

（2）數的加減法可以統一爲加法。

【案例 1-27】 計算 $-40 - 28 + 19 - 24 + 32$

分析：

$$\begin{aligned}
&-40 - 28 + 19 - 24 + 32 \\
&= (-40) + (-28) + (+19) + (-24) + (+32) \\
&= (-40) + [(+19) + (-28)] + [(+32) + (-24)] \\
&= (-40) + (-9) + (+8) \\
&= (-49) + (+8) \\
&= -41
\end{aligned}$$

爲了簡化計算步驟，我們可以不把加減混合算式統一成加法運算，而是在大腦裡把它看成各個有理數的和來直接運算。這裡需要注意的是，一個數必須連同它的符號一起移動位置，把幾個數結合在一起，括號前須添正號。比如，

【案例 1-28】　$-40-28+19-24+32$

分析：

$$\begin{aligned}&-40-28+19-24+32\\&=-40+(19-24)+(32-28)\\&=-40-5+4\\&=-41\end{aligned}$$

（3）可給實數引入絕對值的概念。

數 x 的絕對值 $|x|$ 可定義爲 $|x|=\begin{cases}x, & x\geq 0;\\ -x & x<0.\end{cases}$ 例如，$|3|=3$ 及 $|-3|=-(-3)=3$。另外，$|x|$ 也可看作是數 x 與原點 O 在數軸上的距離。利用絕對值來討論正負數的乘法就很方便了。同號的兩數相乘，其積是這兩個數絕對值的積，即若 a、b 同號，則 $a\cdot b=|ab|$；異號的兩個數相乘，其積是這兩個數絕對值的積的相反數，即若 a、b 異號，則 $a\cdot b=-|ab|$。

根據乘法定義，乘法的關鍵是確定積的符號。因此，“兩數相乘，同號得正，異號得負”是必須熟悉掌握的。另外，由乘法定義，我們還知道，一個數和 $+1$ 相乘，得原數；一個數和 -1 相乘，得原數的相反數。這個結論是很顯然的，它在理論上和算式變形上都常用到。例如，要改變一個數的符號，同用 -1 乘這個數是一樣的。關於“負負得正”，不同的文章（如蕭文強，1982；榊忠男，2002；Crowley & Dunn, 1985；Siu & Siu, 1992）提供了不同的解釋模型，在教學上十分管用。下面我們從數學上對“負負爲何得正”給出解釋：

首先，若 0 爲加法單位元，0 同時亦是“零化子”，即 0 乘以任何元 a 結果都是 0。

我們有 $0(a) = (1-1)a = a - a = 0$，“1”爲乘法單位元且“1”亦必有加法逆元。

假設 k 爲 1 的加法逆元，即 $1 + k = 0$

$$\begin{aligned} 0 &= k(1+k) && \text{（因 0 是“零化子”）} \\ &= k + kk && \text{（分配律）} \\ 1 &= 1 + (k + kk) \\ &= (1+k) + kk && \text{（結合律）} \\ &= 0 + kk = kk \end{aligned}$$

用通常的符號，k 就是“-1”，即 $1 = (-1)(-1)$。於是，進一步地，也就有

$$(-a)(-b) = [(-1)(-1)]\,(ab) = 1(ab) = ab\text{。}$$

五、指數與對數

1. 正整數指數冪

正整數指數冪的運算法則如下：

① $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$；

② $a^m \div a^n = a^{m-n}, m > n,\ a \neq 0$；

③ $(a^m)^n = a^{mn}$；

④ $(ab)^n = a^n \cdot b^n$；

⑤ $(\frac{a}{b})^n = \frac{a^n}{b^n} (b \neq 0)$。

如果沿用正整數指數冪的定義把 a^0 理解爲“0 個 a 相乘”

顯然是沒有意義的，因此需要給出新的定義。在給出它的定義時，必須考慮以下兩個方面的要求：

（1）　在新的定義下，a^0 表示唯一確定的值；

（2）　在新的定義下，對於非負整數指數的冪，正整數指數冪的運算法則能夠保持，不然的話，每種不同指數的冪都有一套運算法則，運用起來不勝其煩，這種推廣就沒有甚麼意義了。

爲了達到上述兩個方面的要求，我們常假定諸法則中的某個對於零指數冪成立。一方面我們要求給出 a^0 必要的定義，然後再驗證在這樣定義下其他諸法則也是成立的，這樣所給定義就滿足第二方面的要求。

由於引進零指數冪概念時所選擇的法則不同，可有不同的方案，這裡介紹兩種：

假定所給 a^0 的定義應滿足法則①，就有

$$a^0 \cdot a^m = a^{0+m} = a^m \text{。}$$

但是當 $a^m \neq 0$，亦即 $a \neq 0$ 時，兩個因數 a^0 與 a^m 的積等於其中一個因數 a^m 的充分且必要的條件是另一因數 a^0 等於 1。這就是說，當 $a \neq 0$ 時，我們如果定義 $a^0 = 1$，那麼法則①就會得到保持。讀者還可檢驗除①外的其他法則也得到保持。

現在從法則②來考慮。在法則②中作爲推廣，如果 $m = n$ 則等式的左端出現 a^0，另一方面，用算術方法可以計算出 $a^m \div a^n = a^n \div a^n = 1$。因此，如定義當 $a \neq 0$ 時 $a^0 = 1$，則法則②將得到保持。這種定義方法是否合理，尚須檢驗除②外的其他法則是否得到保持。現檢驗如下：

在法則①中，可以分以下兩種情況檢驗：

如 m 和 n 中有一個爲 0，設 $m\neq 0$，$n=0$，$a\neq 0$，則

$$a^m\cdot a^n=a^m\cdot a^0=a^m\cdot 1=a^m\text{，}$$

即 $a^{m+n}=a^{m+0}=a^m$，

∴ $a^m\cdot a^n=a^{m+n}$。

如 m 和 n 都等於 0，$a\neq 0$，則

$$a^m\cdot a^n=a^0\cdot a^0=1\cdot 1=1\text{，}$$

即 $a^{m+n}=a^{0+0}=a^0=1$，

∴ $a^m\cdot a^n=a^{m+n}$。

基於上述檢驗，可知對於非負數整指數冪法則①能夠得到保持。

在法則③中，可分三種情況檢驗（$a\neq 0$）：

如 m 是正整數，n 是零：

$$(a^m)^n=(a^m)^0=1\text{，}$$

即 $a^{mn}=a^{n\cdot 0}=a^0=1$，

∴ $(a^m)^n=a^{mn}$。

如 m 是零，n 是正整數：

$$(a^m)^n=(a^0)^n=1^n=1\text{，}$$

即 $a^{mn}=a^{0\cdot n}=a^0=1$，

∴ $(a^m)^n=a^{mn}$。

如 m 和 n 都是零：

$$(a^m)^n=(a^0)^0=1^0=1\text{；}a^{mn}=a^{0\cdot 0}=a^0=1\text{，}$$

∴ $(a^m)^n=a^{mn}$。

基於上述檢驗可知在新的定義下，對於非負整數的冪，法則③能夠保持。

對於法則④,⑤的檢驗比較簡單，只須考慮 $m=0$ 的情形，這時 a ，b 都不爲零。

由於 $(ab)^n=(ab)^0=1$； $a^n\cdot b^n=a^0\cdot b^0=1$，所以當 $n=0$ 時，法則 $(ab)^n=a^n\cdot b^n$ 能夠得到保持。

由於 $\left(\dfrac{a}{b}\right)^n=\left(\dfrac{a}{b}\right)^0=1$；$\dfrac{a^n}{b^n}=\dfrac{a^0}{b^0}=1$，所以當 $n=0$ 時，法則 $\left(\dfrac{a}{b}\right)^n=\dfrac{a^n}{b^n}$ 能夠得到保持。

既然在新的定義下，五個運演算法則都能得到保持，這個定義就是合理的。即定義　$a^0=1\quad(a\neq 0)$ 。

上面我們介紹了給出零指數冪定義的全部過程，在這個過程中必須注意：

- 從法則②出發，考慮 $m=n$ 時它仍能得到保持，是說明規定 $a^0=1\ (a\neq 0)$ 的必要性，並不是作爲定理來證明 $a^0=1$；
- 在法則②中，由於除數不能爲零，所以規定 $a\neq 0$ ，零指數冪的定義是從法則②引進的，因此 $a\neq 0$ 是定義的組成部分。0 的零次冪 0^0 是沒有意義的。例如 $(x-2)^0$ 當 $x\neq 2$ 時，其值等於 1，當 $x=2$ 時無意義。
- 所有五個運算法則對於非負指數的冪都是適用的，我們可以使用它們進行變形或計算。

2. 負整數指數冪

有關負整數指數冪的定義的教學與零指數冪的教學是完

全類似的。這裡提幾點需要注意的事項：

- 負整數指數冪的定義是從法則②引進的，因此在定義

$$a^{-p}=\frac{1}{a^p}\text{（}a\neq 0\text{，}p\text{ 是正整數）}$$

中 $a\neq 0$ 是定義組成部分，0 的負整數指數冪，即 0^{-p} 是沒有意義的。

- 在上述定義下，關於非負整數的五個運算法則仍能得到保證。現以法則③爲例驗證如下：

對於法則③，m，n 中至少有一個負整數，可分爲三種情況驗證：

$m=-p$（p 是正整數），n 是非負整數，則

$$(a^m)^n=(a^{-p})^n=\left(\frac{1}{a^p}\right)^n=\frac{1}{a^{np}}=a^{-np}=a^{(-p)n}=a^{mn}\text{ ；}$$

$n=-p$（p 是正整數），m 是非負整數，則

$$(a^m)^n=(a^m)^{-p}=\frac{1}{(a^m)^p}=\frac{1}{a^{mp}}=a^{-mp}=a^{m(-p)}=a^{mn}\text{ ；}$$

$m=-p$，$n=-q$，p、q 都是正整數，則

$$(a^m)^n=(a^{-p})^{-q}=\frac{1}{(a^{-p})^q}=\frac{1}{a^{-pq}}=a^{pq}=a^{(-p)(-q)}=a^{mn}\text{ 。}$$

因此，對於負整數指數的冪，法則③ $(a^m)^n=a^{mn}(a\neq 0)$ 是成立的。

- 負整數指數冪有着重要的作用

(i) 從定義 $a^{-p}=\dfrac{1}{a^p}$（$a\neq 0$，p 是正整數）可以看出：

(1) a^{-p} 和 a^p 是互爲倒數的。利用它可以改變指數的符

號：$a^{-p}=\dfrac{1}{a^{p}}$，$a^{p}=\dfrac{1}{a^{-p}}$。

(2) $a^{-p}=\left(\dfrac{1}{a}\right)^{p}$。這就是說，要改變指數的符號須同時把底數換成原底數的倒數。

(3) $a^{m}\div b^{n}=a^{n}\cdot b^{-n}$；$\dfrac{a^{m}}{b^{n}}=a^{m}b^{-n}$。這說是說，應用負整數指數冪可以把乘法形式和除法形式、分式形式和整式形式互相轉化。

(4) $a^{-p}\ (a\neq 0)$ 表示一個數，因此數的計算法則對 a^{-p} 仍然保持。

(ii) 引進負整數指數冪以後，科學記數法

$$N=a\times 10^{n}\qquad（1\leq a<10，n\text{是整數}）$$

才能實現。科學記數法在實踐中應用較廣，它也是學習對數首數和尾數的基礎。對此，要求：

(1) 能把一個數 N 寫成科學記數法的形式：例如

$$134.05=1.3405\times 10^{2}；$$

$$0.00000013405=1.3405\times 10^{-7}。$$

(2) 能把一個科學記數法表示的數寫成原數，例如

$$1.25\times 10^{5}=125000；$$

$$1.25\times 10^{-5}=0.0000125。$$

科學記數法 $a\times 10^{n}$ 中的 n 的絕對值表示把小數點向左（$n<0$）或向右（$n>0$）移動的位數。

(iii) 引進負整指數冪以後，冪的運算法則②

$$a^{m}\div a^{n}=a^{m}\cdot a^{-n}=a^{m+(-n)}$$

可由法則①所代替；法則⑤ $\left(\dfrac{a}{b}\right)^{n}=(ab^{-1})^{n}=a^{n}\cdot b^{-n}$ 可

由法則④所代替，因此，冪的運算法則可以合併爲三條：

指數加法律　$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$ ；

指數乘法律　$(a^m)^n = a^{mn}$ ；

指數分配律　$(ab)^m = a^m b^m$ 。

其中 m ，n 爲整數，但須注意當指數爲負整數和零時，它的底數不能等於零。

根據冪的運算法則，對於底數是和（差）的冪或兩個不同底的冪的和（差）是沒有簡便計演算法則的，這時須用定義把它轉化爲正整數指數冪計算。例如：

(1)　$(a+b)^{-1} = \dfrac{1}{a+b}$ ；

此時，須防止出現類似 $(a+b)^{-1} = a^{-1} + b^{-1}$ 的錯誤。

(2)　$\dfrac{a^{-1}+b^{-1}}{a^{-1}-b^{-1}} = \dfrac{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}{\frac{1}{a}-\frac{1}{b}} = \dfrac{b+a}{b-a}$ 。

此時，須防止出現類似 $\dfrac{a^{-1}+b^{-1}}{a^{-1}-b^{-1}} = \dfrac{(a+b)^{-1}}{(a-b)^{-1}} = \dfrac{a-b}{a+b}$ 的錯誤。

3. 分數指數冪

（1）分數指數冪概念的引進

從根式的基本性質

$$\sqrt[np]{a^{mp}} = \sqrt[n]{a^m}$$（ $a \ge 0$ ，m 、n 和 p 是正整數）

我們知道：

$\sqrt{a^6} = a^3 = a^{\frac{6}{2}}$　　（ $a \ge 0$ ）；

$\sqrt[3]{a^{12}} = a^4 = a^{\frac{12}{3}}$　　（ $a \ge 0$ ）；

$\sqrt[n]{a^m}=a^{\frac{m}{n}}$ （$a\ge 0$，m是n的整數倍，n是正整數）。當被開方數m不能被根指數n整除時，仍然沿用上述法則，便有

$$\sqrt[3]{a^2}=a^{\frac{2}{3}} \qquad （a\ge 0）$$

$$\sqrt[5]{(a+b)^3}=(a+b)^{\frac{3}{5}} \qquad （a+b\ge 0）$$

$$\sqrt[n]{a^m}=a^{\frac{m}{n}} \qquad （a\ge 0，m\text{和}n\text{是正整數}）。$$

這裡出現的分數指數冪，我們不能把它理解爲幾個相同因數的積，必須給出新的定義：$a^{\frac{m}{n}}=\sqrt[n]{a^m}$ （$a\ge 0$，m和n都是正整數）。

這裡的$\frac{m}{n}$具有分數的基本性質：$\frac{m}{n}=\frac{mp}{np}$（$p$是正整數），我們可以向對待通常的分數一樣去對待它。和負整數指數冪的定義類似，我們規定：

$$a^{-\frac{m}{n}}=\frac{1}{a^{\frac{m}{n}}}=\frac{1}{\sqrt[n]{a^m}} \qquad （a>0，m\text{和}n\text{是正整數}）。$$

（2）分數指數冪運算法則

在上述分數指數冪的定義下，整數指數冪的三個運算法則能夠保持。由於檢驗方法完全類似，這裡以法則①爲例來驗證它成立，現分以下各種情況：

1） m和n中有一個是分數指數（n），而另一個是整數指數（m）。

設 $n=\dfrac{p}{q}$　（p 和 q 是正整數），則

$$a^m\cdot a^n=a^m\cdot a^{\frac{p}{q}}=a^m\cdot\sqrt[q]{a^p}=\sqrt[q]{a^{mq}}\cdot\sqrt[q]{a^p}$$

$$=\sqrt[q]{a^{mq+p}}=a^{\frac{mq+p}{q}}=a^{m+\frac{p}{q}}=a^{m+n}\ ;$$

設 $n=-\dfrac{p}{q}$　（p 和 q 是正整數），則

$$a^m\cdot a^n=a^m\cdot a^{-\frac{p}{q}}=a^m\cdot\frac{1}{\sqrt[q]{a^p}}$$

$$=\frac{\sqrt[q]{a^{mq}}}{\sqrt[q]{a^p}}=\sqrt[q]{\frac{a^{mq}}{a^p}}=\sqrt[q]{a^{mq-p}}=a^{\frac{mq-p}{q}}$$

$$=a^{m+(-\frac{p}{q})}=a^{m+n}\ 。$$

2）m 和 n 都是分數指數

設　$m=\dfrac{p}{q}$，$n=\dfrac{r}{s}$，則

$$a^m\cdot a^n=a^{\frac{p}{q}}\cdot a^{\frac{r}{s}}=\sqrt[q]{a^p}\sqrt[s]{a^r}=\sqrt[qs]{a^{ps+rq}}$$

$$=a^{\frac{ps+rq}{qs}}=a^{\frac{p}{q}+\frac{r}{s}}=a^{m+n}\ ;$$

設　$m=-\dfrac{p}{q}$，$n=\dfrac{r}{s}$，則

$$a^m\cdot a^n=a^{-\frac{p}{q}}\cdot a^{\frac{r}{s}}=\frac{\sqrt[s]{a^r}}{\sqrt[q]{a^p}}=\sqrt[qs]{a^{qr-ps}}$$

$$=a^{\frac{qr-ps}{sq}}=a^{-\frac{p}{q}+\frac{r}{s}}=a^{m+n}\ ;$$

設　$m=-\dfrac{p}{q}$，$n=-\dfrac{r}{s}$，則

$$a^m \cdot a^n = a^{-\frac{p}{q}} \cdot a^{-\frac{r}{s}} = \frac{1}{a^{\frac{p}{q}}} \cdot \frac{1}{a^{\frac{r}{s}}}$$

$$= \frac{1}{a^{\frac{p}{q}+\frac{r}{s}}} = a^{-(\frac{p}{q}+\frac{r}{s})} = a^{-\frac{p}{q}+(-\frac{r}{s})}$$

$$= a^{m+n} \text{。}$$

綜合上述各種情況，可知法則①對於分數指數冪是成立的。

（3）分數指數冪的作用

借助分數指數冪的定義我們可以把開方形式和乘方形式互相轉化，把根式性質和冪的運演算法則統一起來。這在理論上和實踐上都有意義。一般情況下，將根式變形和化爲分數指數冪去處理是比較方便的，例如：

分數指數冪	根式
$a^{\frac{mp}{np}} = a^{\frac{m}{n}}$	$\sqrt[np]{a^{mp}} = \sqrt[n]{a^m}$
$(ab)^{\frac{1}{n}} = a^{\frac{1}{n}} b^{\frac{1}{n}}$	$\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a}\sqrt[n]{b}$
$(\frac{a}{b})^{\frac{1}{n}} = \frac{a^{\frac{1}{n}}}{b^{\frac{1}{n}}}$	$\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$
$(a^{\frac{1}{n}})^m = a^{\frac{m}{n}}$	$(\sqrt[n]{a})^m = \sqrt[n]{a^m}$
$(a^{\frac{1}{n}})^{\frac{1}{m}} = a^{\frac{1}{n}\cdot\frac{1}{m}}$	$\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[mn]{a}$

需要特別強調的是，分數指數冪的底數是局限在$a > 0$的範圍內。對於分數指數冪的加減法，並沒有甚麼簡便的運算法

則，因此分數指數冪的運算並不能全部代替根式的計算。

4. 無理指數的冪

討論無理指數冪需要用到有理數集上指數函數的性質和極限概念，中學裡一般不討論這個問題。但是要研究實數集上的指數函數，又非涉及它不可。這裡以$10^{\sqrt{2}}$的意義爲例來說明。

假設$a=\sqrt{2}$的不足近似值和過剩近似值分別爲：

$$\alpha_n^-：1, 1.4, 1.41, 1.414, \ldots$$
$$\alpha_n^+：2, 1.5, 1.42, 1.415, \ldots$$

這樣，可以得到

$$10^{\alpha_n^-}：10^1, 10^{1.4}, 10^{1.41}, 10^{1.414}, \ldots \qquad \{10^{\alpha_n^-}\}$$
$$10^{\alpha_n^+}：10^2, 10^{1.5}, 10^{1.42}, 10^{1.415}, \ldots \qquad \{10^{\alpha_n^+}\}$$

通過計算可知$\{10^{\alpha_n^-}\}$是遞增的，$\{10^{\alpha_n^+}\}$是遞減的，而$10^{\alpha_n^+}-10^{\alpha_n^-}$的差越來越小，因此$\{[10^{\alpha_n^-}，10^{\alpha_n^+}]\}$是一個退縮的閉區間序列。從數軸上看，這個序列中所有區間都有且僅有一個公共點。我們就把這個點表示的數叫做$10^{\sqrt{2}}$。一般地，我們有如下的定義：

若$a>1$，α是無理數，α_n^-，α_n^+爲有理數，$\alpha_n^-<\alpha<\alpha_n^+$，（$n=1, 2, \ldots$），$\alpha_n^+-\alpha_n^-\to 0$，則序列$\{[a^{\alpha_n^-}，a^{\alpha_n^+}]\}$的極限所決定的數叫做$a^{\alpha}$。

若$0<a<1$，α是無理數，則序列$\{[a^{\alpha_n^+}，a^{\alpha_n^-}]\}$的極限所決定的數叫做$a^{\alpha}$。

可以驗證，對以$a>0$爲底數的有理整指數冪的運算法則都適用無理指數的冪。

對於$a>0$，$x^n=a$只有一正實根。若$a<0$，情況變得複雜，如果勉強定義，就會出現像

$$-2=(-8)^{\frac{1}{3}}=(-8)^{\frac{2}{6}}=\left[(-8)^2\right]^{\frac{1}{6}}=64^{\frac{1}{6}}=2$$

一類的悖論。因此，我們一般仍把討論限定在$a>0$的情況。

5. 對數

從某個意義上來說（詳細分析見後），對數是指數的逆運算。

（1）對數存在定理

定理　若a爲不等於 1 的正數，則對於任何正實數N都有唯一的實數α與之對應，使得a的α次冪等於N，即

$$a^{\alpha}=N\text{。}$$

對數存在定理是研究對數的理論基礎。下面我們給出這個定理的證明。

證明　爲了確定起見，先設$a>1$，我們採取區間套原理來證明。首先，試看a的各整次冪所成的數列

$$\ldots,a^{-2},a^{-1},a^0,a^1,a^2,\ldots$$

在這些值所形成的區間裡可以有任意大小的正數，假設a^{p+1}（p是整數）是其中大於N的最小數，得

$$a^p\le N<a^{p+1}\text{。}$$

若 $a^p = N$ ，則這時 p 就是所求的數 α ；若 $a^p < N$ ，則可繼續尋求 a ：把 $[p, p+1]$ 分成十等分，設 $a^{p+\frac{q_1+1}{10}}$ 是其中大於 N 的最小數，則

$$a^{p+\frac{q_1}{10}} \le N < a^{p+\frac{q_1+1}{10}} 。$$

若 $a^{p+\frac{q_1}{10}} = N$ ，則 $\alpha = p+\frac{q_1}{10}$ 就是所求的數；若 $a^{p+\frac{q_1}{10}} < N$ ，則可效仿前面的方法繼續尋求 a ：把 $[p+\frac{q_1}{10}, p+\frac{q_1+1}{10}]$ 分成十等分，設 $a^{p+\frac{q_1}{10}+\frac{q_2+1}{10^2}}$ 是大於 N 的最小數，則

$$a^{p+\frac{q_1}{10}+\frac{q_2}{10^2}} \le N < a^{p+\frac{q_1}{10}+\frac{q_2+1}{10^2}}$$

這樣重複上述方法，繼續尋求 α ，就會得到序列

$$\alpha_n^- = p+\frac{q_1}{10}+\frac{q_2}{10}+\cdots\frac{q_n}{10} \quad 及$$

$$\alpha_n^+ = p+\frac{q_1}{10}+\frac{q_2}{10}+\cdots\frac{q_n}{10}+\frac{q_n+1}{10}, n \ge 1$$

其中 α_n^+ 是在 $[\alpha_{n-1}^-, \alpha_{n-1}^+]$ 中，而 q_n 是使 $a^{\alpha_n^+} > N$ 的最小數。根據各數碼的選定方法，可知 α 的所有精確到 $\frac{1}{10^n}$ 的近似值都滿足

$$a^{\alpha_n^-} \le N < a^{\alpha_n^+} 。$$

故有兩種可能的情況：

情況一，若對某個 n ，有 $a^{\alpha_n^-} = N$ ，則 α_n^- 就是所求的數 α ；否則，

情況二，對所有的 n ， $a^{\alpha_n^-} \ne N$ ，則

$$\lim_{n\to\infty}\alpha_n^- = \alpha = p\cdot q_1q_2\ldots q_n\ldots \text{（}\because \lim_{n\to\infty}\alpha_n^- = \lim_{n\to\infty}\alpha_n^+\text{）}$$

且由於對所有的n，有 $a^{\alpha_n^-} < a^{\alpha} < a^{\alpha_n^+}$ 。

所以　$N = a^{\alpha} = \lim_{n\to\infty} a^{\alpha_n^-}$ 。

對於$0 < a < 1$的情況，此時$\dfrac{1}{a} > 1$，根據以上證明的結論，可知對於任意正數N，都有實數α'與之對應，使得$\left(\dfrac{1}{a}\right)^{\alpha'} = N$，即$a^{-\alpha'} = N$。也就是說，當 $0 < a < 1$ 時，對於任意正數N都有實數$\alpha = -\alpha'$與之對應，使得$a^{\alpha} = N$。

（2）對數概念的引入

在指數運算法則中，我們知道：

① $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$；

② $a^m \div a^n = a^{m-n}$；

③ $(a^m)^n = a^{mn}$；

④ $\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$。

這說是說，如果正數M，N能寫成a（$a > 0$，$a \neq 1$）的乘方（乘冪）形式，利用指數運算則就可把M，N兩個數積的運算轉化爲加法運算，兩數商的運算則轉化爲減法運算；一個數N的乘方運算轉化爲乘法運算，一個數N的開方運算就轉化爲除法運算。

例如，利用 2 的乘冪表：

x	…	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	…
2^x	…	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4	8	16	32	64	128	256	512	1024	…

我們可以計算：

$16\cdot 64 = 2^4\cdot 2^6 = 2^{4+6} = 2^{10} = 1024$；

$2048 \div 256 = 2^{11} \div 2^8 = 2^{11-8} = 2^3 = 8$；

$\sqrt[3]{512} = \sqrt[3]{2^9} = 2^{\frac{9}{3}} = 2^3 = 8$。

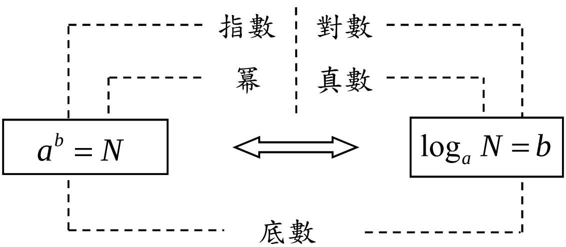
因此，要想將高一級的運算化爲低一級的運算以達到簡化計算的目的，首先就必須把已知正數 N 寫成已知的正數 a（$a>0$，$a\neq 1$）的乘冪。這個冪指數即是我們要介紹的對數。那麼，對數是怎麼定義的呢？

定義　如果 $a^b = N$　（$a>0$，$a\neq 1$），則 $b=\log_a N$。

該表達式讀作：b 是以 a 爲底 N 的對數。其中 a 叫底數，N 叫真數。

總的來看，上述引入對數的方案具有如下特點：

1）　它把對數和冪指數緊密聯繫在一起。求對數其實是乘方的一種逆運算（已知乘冪、底數求冪指數）但又與開方不同，它們之間的關聯是：



我們可以看到，指數和對數的公式“恰好”是相配的：

指　數	對　數
＋變×：$\log M+\log N=\log MN$	×變＋：$a^x a^y=a^{x+y}$
−變÷：$\log M-\log N=\log\dfrac{M}{N}$	÷變−：$\dfrac{a^x}{a^y}=a^{x-y}$
冪可“拉下”：$\log M^n=n\log M$	冪可“移上”：$\left(a^x\right)^n=a^{nx}$

在以往沒有計算器的年代，人們會利用（常用）對數進行大數的乘除運算。對於兩個數 M 和 N，要手算 MN，先通過對數表如圖 1-19 所示查出 $\log M$ 和 $\log N$，然後相加（將兩個數加起來，總是比相乘要容易），亦即是 $\log M+\log N=\log(MN)$。再查反對數，就得出 MN。計算尺如圖 1-20 所示也是運用相似的原理。類似的，其他如 M^p 的值也可運用此方法去算出。

今天看來，這種方法顯得十分可笑，但也可算是對數法則的巧妙運用。不過，對數的用處不限於對大數的計算，還有一些其他有意思的作用，例如，估算 2^{132049} 會是一個有多少位值的數等。

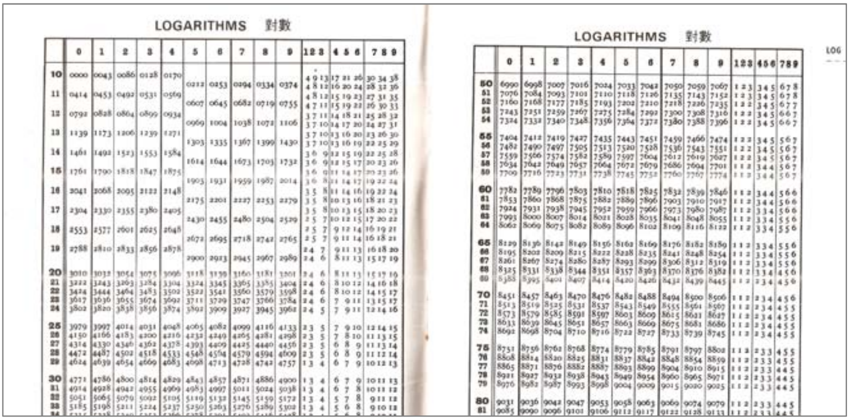


圖 1-19　對數表

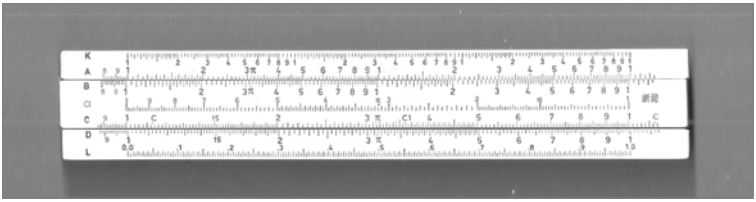


圖 1-20 計算尺

2） 它提示了研究對數的目的就是簡化運算，這也是符合歷史實際的，當然對數在進一步的學習中還有其他作用。

3） 它揭示了應用對數簡化計算是一種間接計算，它需要經過取對數、對數計算、去對數等步驟，這爲今後的學習內容提供了借鑒。

（3）常用對數

以 10 爲底的對數叫做常用對數，可簡記爲 $\log_{10} N = \lg N$ 。理解和掌握常用對數的關鍵在於掌握正數 N 的科學記數法。

$\lg N = \lg(a \times 10^n) = n + \lg a$ （其中 $1 \le a < 10$ ， n 是整數）。

由數 N 確定 n 的規律是：

如 $N \ge 1$，則 n 爲非負整數，其絕對值等於 N 中第一個有效數字前面所有零的個數。需要注意的是，它包括整數部分的零。

由於 $\lg N = \lg(a \times 10^n) = n + \lg a$，所以上述由 N 確定 n 的法則，就是由真數 N 確定其對數首數 n 的法則。

由於 $1 \le a < 10$ ，可以得到 $0 \le \lg a < 1$，所以 $\lg a$ 是正的純小數，即 N 的對數的尾數。

基於上述分析，我們可以看到常用對數具備以下特性：

1）　常用對數可以寫成一個整數 n（對數首數）加上一個正的純小數 $\lg a$（對數尾數）的和的形式。

2）　兩個數如果只有小數點位置不同，則它們的對數的尾數都相同。

因此，我們只須列出 $1\sim10$ 間各數的對數，就可以求出一切正實數的對數。這種列出的數表叫做常用對數表，而四位對數表就是說對數尾數精確到 $\frac{1}{10^4}$。

（4）自然對數

自然對數爲以 e 爲底的對數，簡記爲 $\log_e N=\ln N$，其法則與一般對數沒有分別。只是由於 e 的獨特性（特別地，e^x 是一個與其導數相等的函數，即 $\frac{d}{dx}e^x=e^x$）。它在微積分中較爲常用。

第二節　數系的結構與性質

一、數系的擴展與三次數學危機

在數系的結構和性質中，數的運算性質至關重要。首先，我們思考這樣一個問題：爲甚麼要知道交換律？比如，11×36 和 36×11 爲甚麼能交換？我們又爲甚麼需要交換？

對於交換律的使用，不外乎下面幾個原因：

（1）數的方法殊途同歸；
（2）巧算；
（3）協助記乘數表。

$$\begin{array}{r} 11 \\ \times\ \ 36 \\ \hline \end{array} \qquad \begin{array}{r} 36 \\ \times\ \ 11 \\ \hline \end{array}$$

交換律看似十分簡單，然而在教學中，教師卻出現了下面的疑惑：

【案例 1-29】 蘋果每個 3 元，2 個蘋果一共的價錢是寫成 3 元 $\times 2$、(3×2)元還是 (2×3)元？

分析：按一般的慣例是寫作 3 元$\times 2$ 及 (3×2) 元，不過我們要問，寫成 (2×3) 元有何不可？一般認爲乘法是連加，例如，一隻雞有兩隻腳，三隻雞則有 $(2+2+2)$ 隻腳，亦即爲 (2×3) 隻腳。其實，我們也可以先數左腳，後數右腳，這樣就變成$(3+3)$ 隻腳，亦即 (3×2) 隻腳。

也有人認爲，以上因只涉汲兩隻腳，2（兩）這個數字比較少，才可用左腳右腳的方式去數。其實再大點的數也可這樣做的。

人(無論祖先或孩童的成長)認識數字恐怕是由數數開始。當然這個“數”是指自然數，它蘊含着序與量兩個方面的內容。以後，通過欠借與分物等，人們認識了負數及分數。因而，有理數系還是比較貼近直觀的。至於無理數或實數，也不是那麼抽象。通過長度、距離、時間等，其中的思想就會出現。因此，在學習中期，引入數軸是一個不錯的做法。因爲數軸可以把實數“建模”（modeling）起來。當然，我們要知道，實數系的本質比較複雜，這也一直是困惑數學界的事情。歷史上，從第一次數學危機到第三次數學危機多多少少都是實數“闖的禍”，因爲其中都涉及到無窮的概念。

回顧數系的擴展，我們發現：由 **N** 到 **Z** 的擴充，是爲了減法的緣故（群），不過卻因此“喪失”了“首元”（first element : 0）；由 **Z** 到 **Q** 是爲了除法（域），但是沒有了“下一個元”。例如在 **Z** 中 7 的下一個元素是 8，但在 **Q** 中 $\frac{7}{8}$ 的下一個元素是沒有意義的；由 **Q** 到 **R** 並不是爲了 $x^2-2=0$ 有解，而是使得所有收斂序列均有極限（即拓撲完備（topologically complete）），不過 **R** 卻喪失了“可數性”（countability）；至由 **R** 擴展到 **C**，才能使所有非常數的多項式皆有根（即代數封閉（algebraically closed）），然而 **C** 中卻沒有了序關係。

然而，數系的這種擴展往往不被重視。特別對於由 **R** 擴展到 **C** 這個問題顯得尤其重要。這是因爲我們要知道哪些 **R** 中的法則可以保有，同時有哪些不能“繼續奏效”？又是爲甚麼不能使用？例如，某題是要求 $-3+4i$ 的平方根。通過比較 $(a+bi)^2=-3+4i$ 的實部與虛部就可求出 a 和 b，但我們怎麼知道複數必有平方根呢？複數又是否“一切如常”的當作實數來進行運算呢？這些問題不能小視。比如，

【例 1-30】　爲甚麼正數一定可以開方？

分析：從幾何圖形的角度，我們可以直觀地感知其中的數學教學知識。例如，對於不同的邊長 p，我們不斷作邊長爲 p 的正方形，其面積就是 p^2，我們有理由相信（仍是直觀感受）這個構造程序是連續的。反過來，對於任何數 q 必能找到一個正方形的面積爲 q，它的邊長就是 $\sqrt{q}$ ，如圖 1-21 所示。

我們也可以考慮斜邊爲 $2q$ 的直角等腰三角形，如圖 1-22 所示，這種三角形顯然存在，根據勾股定理，其直角邊長爲

$2\sqrt{q}$ 。

但是，學生仍舊會有疑問，為甚麼圖 1-21 和圖 1-22 的作圖構造可以不斷進行呢？在畢達格拉斯時代，不存在無理數，

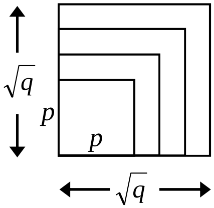


圖 1-21
邊長為 $\sqrt{q}$

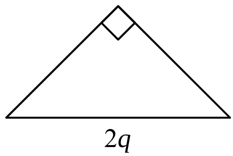


圖 1-22
直角等腰三角形

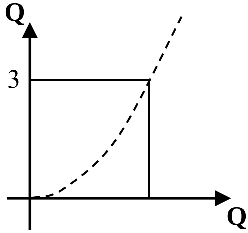


圖 1-23
$y=x^2$ 在 $\mathbf{Q}\times\mathbf{Q}$ 的圖像

因此，當然也就不存在 $\sqrt{q}$ 或 $2\sqrt{q}$ 使得正方形的面積為 q 或者直角等腰三角形的斜邊為 $2q$ 了！這是第一次數學危機中的問題。由此可見，這個問題其實並不簡單。

我們也可觀察到，$y=x^2$ 曲線在 $\mathbf{R}^+$ 的範圍內，如圖 1-23 所示是一個滿射，因此，對於任何 y 均存在正數 x，使得 $x^2=y$ 。這個 x 就是 y 的正平方根 $\sqrt{y}$ 。這個回答看似很數學化，但我們又怎知 $y=x^2$ 曲線沒有隙縫呢？這又是第二、三次數學危機中的問題。

要問 $\sqrt{q}$ 是否存在，即問 $x^2-q=0 \quad (q>0)$ 是否有正實根。我們可以檢查二次方程的判別式為 $\Delta=0^2-4(-q)=4q>0$ ，再比較係數，可以知道該方程不可能有兩個負根。不過，這種解釋還是有不少漏洞。若更仔細一點，仍然考慮 $x^2-q=0$ ，根據代數基本定理，其必有一根。若有非實根，必有一對共軛根，

可設爲 $a+bi$ 和 $a-bi$，於是有 $x^2-q=[x-(a+bi)][x-(a-bi)]$，通過比較係數，可得出矛盾。故方程的根皆爲實根。

說到虛根，這裏涉及到另一個有爭議的問題：

【案例 1-31】 $\sqrt{-1}=i$ 嗎？

分析：不少人均指出籠統地把 i 定義成 $\sqrt{-1}$ 的缺點，它不僅僅是在數學上感到方便或不方便的問題，更主要的是在科學上犯了錯誤。$\sqrt{-1}$ 作爲複數（–1 可看成複數）的平方根，應該有兩個值，其中的一個值稱爲 i，另一值是 $-i$。所以，正確的寫法應該是 $\sqrt{-1}=\pm i$，$i^2=-1$。不過，現在的中學生，甚至很多大學數學系的一些學生，往往只知道 $i=\sqrt{-1}$，不知道 $-i=\sqrt{-1}$ 了。有些學生即便知道 $\sqrt{-1}$ 表示兩個值，但把 i 理解爲 $\sqrt{-1}$ 的算術根。這其實仍舊是不對的。因爲在複數中沒有所謂算術根的說法，最多只能談主值。而算術根與主值絕不是同一個概念。

二、數系的逐步建立

數字是甚麼？它似乎是最簡單不過的東西，但從前文我們可以看到，數字其實有很多“種”。有些比較貼近現實生活，如自然數、整數等，有些已漸漸有了“人造物”的意味，如虛數。人類對實數的認識甚至也有過不少掙扎。一般相信，先理順了自然數，其它數系就可逐步建立起來，但就是自然數也很不容易。至今還有關於“0”是否是自然數的討論。

最早把自然數設基化（axiomatisation）[2] 的恐怕是 19 世

[2] 早期數學家把數學奠基於大眾均能認可的“公理”（axiom），其後又認為這些不是必然的“真理”，只是一種設定的基礎，稱之為“設基”（postulate）。這種步驟名為“公理化”或“設基化”，詳見黃毅英（2007）三次數學危機──個人認知與體會。《中學數學教師研究》，第 2 期，頁 7-10。

紀德國數學家 G. Gottlob Frege（1848-1925）的《算術基礎》（*Grundlagen der Arithmetik*）以及意大利數學家 G. Peano（1858-1932）提出他有名的皮亞諾公設（理），即

（1） 0 是自然數。

（2） 對任一自然數 n，均有唯一繼元 n^+。

（3） 0 不是任何自然數的繼元。

（4） 若 m, n 均爲自然數，而 $m \neq n$，則 $m^+ \neq n^+$。

（5） （數學歸納法原理）若 S 是自然數集 **N** 的一個子集，

且 （i） $0 \in \mathrm{S}$ 及

（ii） 若 $n \in \mathrm{S}$，則 $n^+ \in \mathrm{S}$。

那麼 $\mathrm{S} = \mathbf{N}$。

在第三次數學危機之後，數學家們（以所謂邏輯主義者及形式主義者爲主）嘗試重新構造實數系。羅素（B. A.W. Russell, 1872-1970）的基本想法是，“1”、“2”等根本不是一些“對象”。“1”是所有“1 隻茶杯、1 隻猫……”的總代表。他甚至曾經考慮把“1”定義成天下間所有“單元集”（singleton）的總集，即 1={{1}, {Δ}, {a}, {#}, {2}, …}。但是，由於發現羅素悖論（Russell's paradox），這種想法告吹。不過，羅素也曾嘗試把 1 定義爲上述的“類”（class），縱然這個類不足以形成一個集（Russell, 1919）。馮・諾伊曼（J. von Neumann, 1903-1957）則利用“代表性人物”的方法來重新定義。我們可以想象，在這個實數的重建過程中，數學世界回復到天地初開階段：一無所有，就只有集。由於集論中有存在公理（axiom of existence）及界定公理[3]（axiom of specification），我們可以確定空集 Ø 存在。空集是一個有 0 個元素的集合，所以自然而然地，就定義：

[3] 一般翻譯成“分類公理”或“分離公理”。

（1） 世界甚麼都沒有。
（2） 根據空集公理，起碼有空集 Ø，就叫 Ø 爲 0。
（3） 根據無窮公理，對於集 x，必有 $x^+ = x \cup \{x\}$。
（4） 故有 $0 = \varnothing$ （含 0 個元素）。

$1 = \{\varnothing\}$ （含 1 個元素），

$2 = \{\varnothing, \{\varnothing\}\}$ （含 2 個元素），

$3 = \{\varnothing, \{\varnothing\}, \{\varnothing, \{\varnothing\}\}\}$ （含 3 個元素），

…

從集合論的定義出發，皮亞諾公理變成了定理，其他數系也可以一步一步地建立出來。

首先是從最“基本”開始，就是只承認有空集（因此，後來人們把符號邏輯與集合論併稱爲數學的基礎），由此逐步建立起自然數系 **N**。由 **N** 容易建立 **Z**，**Q** 就是 $\mathbf{Z}\times\mathbf{Z}' / \sim$，其中 $\mathbf{Z}' = \mathbf{Z} \setminus \{0\}$，$\sim$ 爲等價關係：$(a, b) \sim (c, d)$ 當且僅當 $ad = bc$。再通過拓撲封閉性（topological closure）建立出 **R**。

由 **R** 擴展到 **C** 當然是爲了方程 $x^2 + 1 = 0$ 可以求解的原因。更確切地說，**C** 爲 **R** 的代數封閉（algebraic closure）。由高斯（K. F. Gauss, 1777-1855）證明的代數基本定理得知，所有複係數的非常數多項式均至少有一複根，換言之，以 i 擴充一次就夠了，例如 $\mathbf{R}[\sqrt{-2}\,] \sim \mathbf{R}[i]$ 和 $\mathbf{R}[i]([\sqrt{-2}\,]) \sim \mathbf{R}[i]$。而 $x^2 + 1 = 0$ 的兩個根隨意安排一個就可以了，即 $\mathbf{R}[i] \sim \mathbf{R}[-i]$。因此，虛數作爲“人造物”的意念尤爲明顯。在某種意義下，“ i ”是沒有實質意義，因爲改用 $-i$ 也可以[4]。其實，羅素早就提出對於其它數系（如 **N**、**R**……）也是如此。

[4] Fung, C. I., Siu M. K., Wong K. M., & Wong, N. Y. (1998). A dialogue on the teaching of complex numbers and beyond. *Mathematics Teaching, 164*, 26-31.

不只如此，對於複數，我們還有 $\mathbf{C} = \mathbf{R}[i]$。因此，**R** 中的四則運算基本上也可在 **C** 中進行，而對於 $a + bi$ 的運算可當作二項式那樣處理。故此，$(a + bi)(c + di) = (ac - bd) + (ad + bc)i$ 應被視爲是結論而不是定義。

三、群、環與域

當然上述還不是事件的結束。我們還要通過頗複雜的程序（如數學歸納法等）逐一證明我們所熟悉的性質。即：

$(\mathbf{N}, +)$ 是一個群；

$(\mathbf{Z}, +, \cdot)$ 是一個群；

$(\mathbf{Q}, +, \cdot)$ 是一個環；

$(\mathbf{R}, +, \cdot)$ 是一個序完備（order-complete）帶序域。

首先集 A 中的 n 元運算是一個從 A^n 到 A 的映射，這當然要滿足符號的“封閉性”。例如“+”是 **Z** 中的二元運算但不是 **N** 中的二元運算。當然，我們在數學上未必涉及這些深入的推演，但瞭解不同數系的代數結構仍是有必要的。

群的定義爲：設 **G** 爲一非空集合，其中含有一個二元相等關係及二元運算⊙，且具下列性質，則稱 $(\mathbf{G}, \odot)$爲一群，簡稱 **G** 爲一群。

（1）運算⊙可結合。

（2）**G** 中含運算⊙的單位元素。

（3）在 **G** 中恆可得其任意元素 a 對⊙的逆元素。

環的定義爲：設 S 爲一集合，其中含有一個相等的二元關係及兩個二元運算⊕和⊙且具下列六個性質時，稱 $(S, \oplus, \odot)$ 爲一環，或簡稱 S 爲一環。

（1）$\oplus$可交換。

（2）$\oplus$可結合。

（3）$\odot$可結合。

（4）集合 S 中含運算$\oplus$的單位元素。

（5）S 中的元素 a 恆有運算$\oplus$的反元素。

（6）運算$\odot$對$\oplus$可分配。

域的定義為：對於任意 $x, y, z \in \mathbf{F}$

（1）$x \oplus y = y \oplus x$

（2）$(x \oplus y) \oplus z = x \oplus (y \oplus z)$

（3）$\exists\, 0 \in \mathbf{F}$ 使得 $x \oplus 0 = x, \forall x \in \mathbf{F}$

（4）$\forall x \in \mathbf{F}, \exists\, w \in \mathbf{F}$ 使得 $x \oplus w = 0$

（5）$x \odot y = y \odot x$

（6）$(x \odot y) \odot z = x \odot (y \odot z)$

（7）$\exists\, e \in \mathbf{F}, e \neq 0$ 及 $x \odot e = x, \forall x \in \mathbf{F}$ （e 是唯一的）

（8）$\forall x \in \mathbf{F} \setminus \{0\}, \exists\, w \in \mathbf{F}$ 使得 $x \odot w = e$

（w 是唯一的）

（9）$x \odot (y \oplus z) = x \odot y \oplus x \odot z$

其中一個“序” 關係，即對於任意 x 和 y，$x < y$，$x = y$ 和 $y < x$ 三者必居其一。另外，所有有上界的子集均有最小上界。

帶序域的定義：設 $(\mathbf{F}, \oplus, \odot)$ 為一域，若有 $\mathrm{P} \subset \mathbf{F}$ 適合以下公設則稱 $\mathbf{F}$ 為一帶序域。

（1）$x, y \in \mathrm{P} \Rightarrow x \oplus y \in \mathrm{P}$

（2）$x, y \in \mathrm{P} \Rightarrow x \odot y \in \mathrm{P}$

（3）$x \in \mathrm{P} \Rightarrow -x \notin \mathrm{P}$

（4）$x \in \mathrm{F} \Rightarrow (x = 0) \vee (x \in \mathrm{P}) \vee (-x \in \mathrm{P})$

若 $y-x\in \mathrm{P}$，寫作“$x<y$”。“$x\leq y$”即“$x<y$ 或 $x=y$”。

這個 P 就是我們一般認識的正數集。

在帶序域中還有其他的一些性質：

對於帶序域 **F**，若有一子集 S，若對於所有 $x\in \mathrm{S}, x\leq b$，b（$\in$ **F**）稱爲 S 的上界。若 c（$\in$ **F**）爲 S 的上界且對於任意 S 的上限 b 均有 $c\leq b$，c 稱爲 S 的最小上界。若對於任意 **F** 的非空具有上界的子集 S，均有最小上界，則稱帶序域 **F** 是序完備的。

在有序域的意義下，如果存在由 $(\mathbf{R},\oplus,\odot,<)$ 到 $(\mathbf{R}',\oplus',\odot',<)$ 的滿射 f，使得對所有的 $x,y\in \mathbf{R}$，都有

(a) $f(x\oplus y)=f(x)\oplus' f(y)$

(b) $f(x\odot y)=f(x)\odot' f(y)$

(c) $x<y\Leftrightarrow f'(x)<f'(y)$

成立，則稱 **R** 和 **R′**在有序域的意義下是同構的。進一步地，若兩個序完備的帶序域 **R** 和 **R′**在有序域的意義下是同構的，則 **R** 是唯一的。

另外，下列各集合亦爲一環，其運算爲普通加法及乘法：

（1）整數集合；

（2）偶數集合；

（3）實數集合；

（4）複數集合。

以上我們所敘述的實數重建過程，有其具體的歷史背景。由於數學出現了危機，直接搖動了數學的存在，實數的重建更像是在做“漏洞堵塞”。在教學上，我們大可不必如此逐步建

立 **R**。不過，瞭解 **N**、**Z**、**Q** 和 **R** 的代數結構及四者之間的關係，會令到我們的教學更豐富和嚴謹。

第二章　代數

數學的主要內容是計算和證明。在 17 世紀，算術因符號化促使了代數學的產生，代數使計算變得精確和方便，也使計算方法系統化。

“代數”一詞源自阿拉伯語“al-jabr”，意爲“復位”（故此中世紀理髮店會豎起“代數”之牌，因爲兼做脫臼復位），即將未知數移做主項。埃丁（Beha Eddin, 1547-1622）在《算術精義》（*Kholasat al-Hisab*）（約 1600 年）中指出“al-jabr”的另一層意義，即指把“$bx+2q=x^2+bx-q$”變成“$bx+2q+q=x^2+bx$”，而“al-muqabalah”則指進一步轉換成“$3q=x^2$”。

“代數”的一個重要特點是以符號代替某物。用文字代表數，我們有了變量 a, b, c 和 x, y, z 等；數和變量一起運算的結果，我們得到代數式；代數式之間也有加、減、乘、除等運算，這樣就有了代數式及其運算。代數式及其運算可以看成是數與數的運算的一種推廣，它大大拓寬了運算對象的範圍。如果令變量 y 等於含變量 x 的代數式 $p(x)$，即 $y=p(x)$，就得到 x 的函數 y。這是人們知道的第一批函數中的一類，其中最簡單、最基本的就是冪函數，多項式函數，指數函數及其反函數，即對數函數。

讓兩個含變量的代數式相等便得到方程。方程是變量之間數量關係的直接體現，而數和代數式是方程不可或缺的基礎。把方程中的“＝”換成實數系所特有的“＞”（或“＜”）便得到不等式，因而兩者有類似的地方。比如方程有同解變換，

不等式也有同解變換。但“ ＞ ”的性質比“ ＝ ”的性質“壞”許多，因此，我們應非常小心地對待不等式。

數是刻畫靜態下物體的量，例如一棵樹在某一時刻的高度是 2 米。如果在每年的同一時刻都記錄下這棵樹的高度，並按先後順序排列着一列數，就稱爲數列。數列可以看成定義在正整數集或其有限子集上的函數，它是刻畫離散過程的重要數學模型。

在本章我們將從介紹符號的本質出發，再從代數式聚焦到多項式及運算與相關法則，如餘式定理等，代數式自然即轉到方程及其解，這裏集中於多項式方程；之後即介紹函數及其圖像，由方程又轉到不等式及其解；最後以數列作結。

這也就涵蓋了（代數）符號世界在中小學數學範圍中的重要部分。

第一節　符號及其意義

算術與代數運算雖然有所不同，但代數往往能用算術作模擬，代數的學習也往往以算術作基礎。兩者之間的一個顯著不同便是代數涉及符號的運算。對於中小學學生來說，符號運算的作用就是希望能建立他們的符號感。

符號感主要表現在：能從具體情境中抽象出數量關係和變化規律，並用符號來表示；理解符號所代表的數量關係和變化規律；會進行符號間的轉換；能選擇適當的程序和方法解決用符號所表達的問題。

一、符號概念

1. 符號語言的特徵

符號是人們進行表示、計算、推理、交流和解決問題的工具。符號表示是人類文明發展的重要標誌之一。符號語言除具有一般語言的特徵外，還具有的顯著特徵是：精確性、簡潔性和相通性。數學是使用符號最多的學科，採用符號避免了累贅的文字敘述，使數學變得簡潔而準確，例如，“一個數的相反數與它的絕對值的差等於該數與這個數的絕對值的和的兩倍”，這段文字有點像繞口令，若用數學符號表述，則是“設這個數爲 a ，則 $-a-|a|=2(a+|a|)$”簡潔而明確；又如，數學上有許多基本符號，如“+”、“−”、“×”、“÷”、“＞”、“≈”等等，它們都有確切的含義，不會因各民族有各民族自己的語言而產生混淆或歧義，它們被廣泛運用，具有相通性。

2. 一些數學符號的來歷

數學符號林林總總，每一種符號在歷史發展中也不是一成不變的。數學符號源自文藝復興與初期的速記法，在不同的時代和不同的國家，符號的一致性並不高。印刷術的出現，使得符號開始出現較多的一致性。儘管如此，還是經過了漫長的時間，才使算術符號成爲我們書寫的共同部分。

加號曾經有好幾種，現在通用“+”號。“+”號是由拉丁文“et”（“和”的意思）演變而來的。16 世紀，意大利科學家塔爾塔利亞（Nicolo Tartaglia, 約 1500-1557）用意大利文“plu”（加的意思）的第一個字母 p 表示加。“−”號則是從拉丁文“minus”（“減”的意思）演變來的，簡寫 $\overline{\mathrm{m}}$ ，再省

略掉字母，就成了“–”了。 也有人說，賣酒的商人用“–”表示酒桶裏的酒賣了多少。以後，當把新酒灌入大桶的時候，就在“–”上加一豎，意思是把原線條勾銷，這樣就成了個“+”號。我們現在熟悉的加號“+”與減號“–”第一次出現在印刷書上，是 15 世紀德國數學家維德曼（Johann Widmann, 約 1460-1498）在 1489 年所寫的有關商業算術的書。而第一部使用“+”和“–”的英文書則是 16 世紀列考爾德（Robert Recorde, 1510-1558）的代數課本《勵智石》（*Whestone of Witte*）。

乘號曾經用過十幾種，現在通用兩種。一個是“×”，最早是英國數學家奧屈特（William Oughtred, 1575-1660）在 1631 年出版的《數學之論》（*Clavis Mathematicae*）中提出的；另一個是“·”，最早是英國數學家哈里奧特（Thomas Harriot, 1560-1621）首創的。德國數學家萊布尼茨（Gottfried Wilhelm Leibniz, 1646-1716）認爲：“×”號像拉丁字母“X”，擔心兩者混淆，贊成用凸點“·”作爲乘法的符號，這個用法至今還在使用，如 2·3 表示 2 乘 3。他自己還提出用“п”表示相乘。這個符號現在應用到集合論中去了。而現代的計算器及電腦中使用星號表示乘法：2 乘 3 被輸入成 2*3。

“÷”最初是作爲減號在歐洲大陸長期流行。直到 1631 年英國數學家奧屈特用“:”表示除或比，另外有人用“—”（除線）表示除。後來“÷”用來表示除法，而非減法。不過在歐洲的一些國家仍普遍依照萊布尼茨在 1684 年採用的冒號“：”表示除法的想法。直到 20 世紀，符號“÷”才真正被大家廣爲接受。

平方根號曾經用拉丁文“Radix”（根）的首尾兩個字母

合併起來表示，17 世紀初葉，法國數學家笛卡兒在他的《幾何學》中，第一次用“$\sqrt{\ }$”表示根號。“$\sqrt{\ }$”是由拉丁字母“r”變化而來的。

英國牛津大學數學、修辭學教授列考爾德（R. Recorde, 1510-1558）覺得，用兩條平行而又相等的直線來表示兩數相等是最合適不過的了，於是等於符號“=”就從 1540 年開始使用起來。1591 年，法國數學家韋達（François Viète, 1540-1603）在菱形中大量使用這個符號，才逐漸爲人們接受。17 世紀德國萊布尼茨廣泛使用了“=”號，他還在幾何學中用“~”表示相似，用“≌”表示全等。

而大於號“＞”和小於號“＜”就是英國數學家哈里奧特創用的。至於“≯”、“≮”、“≠”這三個符號的出現，是很晚很晚的事了。

任意號來源於英語中的“any”一詞，因爲小寫和大寫均容易造成混淆，故將其單詞首字母大寫後倒置，如“∀”所示。類似的還有存在符號來源於英語中的“exist”，也是爲避免混淆用“∃”表示。

3. 數學符號的分類

數學符號從其作用上大致可分爲五類：元素符號、關係符號、結合符號、運算符號和輔助符號。

元素符號是指表示數或幾何圖形的符號。如數字符號 0，1，2，3，0.2，3.12；表徵數的字母 a，b，c，…，x，y，z，某些特定的常數 π，e，i；表示幾何圖形的符號∠，三角形的

三邊 a，b，c 等等。其中數字符號及 π，e，i 等爲常數，其它字母則往往爲變數。

關係符號是指表示數、式、形之間關係的符號。表示數的關係的符號如：$26 \neq 15$，$15 > 2.5$，$7.34 \approx 7$；表示代數關係的符號如：$1 + 2x = 5x$；表示幾何圖形關係的符號如⊥，//，≅等等。

綜合符號是指表示改變運算順序的符號，其中包括(　)，[　]，{　}。

運算符號表示按照某種規定進行運算的符號，例如 ＋ 、 – 、 × 、 ÷ 、$\sqrt{\ }$ 、sin、cos、tan、log、 $f(x)$ 等等。

除此之外，爲了便於表達和運算，數學中還引進了一些符號，用於表達某些特定的式子或某種特定的意義，我們稱這一類數學符號爲輔助符號。例如，“Δ”表示一元二次方程的根的判別式，又如 max（最大）、min（最小）等等。

二、符號運算

對中學生來說，將 $3xy + 2bx + 6ax + 7y + 8a = 96 - 7a + 8x$ 進行移項和做主項變換，有何意義呢？如前所述，從代數的詞源“al-jabr”來看，就有即將未知數移做主項的含義。對於學生的學習來說，就是通過這些運算培養出一種符號感，包括符號的操作（manipulation）。Langrall & Swafford 也曾提出代數思維如同對待已知量一樣“運用”未知量的能力。蔡金法等人則進一步提出了一些“思維習慣”（thinking habits），比如以代數方式表示量化關係，包括以逆運算解問題，從具體事例作出推廣，分析部分與全部作用與反作用等。

符號運算的學習一般是建立在數字運算的基礎上的，因爲它們之間仍有不少類似的地方，也適合相似的運算法則。不過，如上章所述，符號除了數字之外，還有很多不同的內含。比如，兩個符號或數字放在一起就可以有相連不同的意義（如 24, $3a$, $1\frac{1}{2}$）。另外，運用數字的規則往往又不適用於符號，這就形成學習代數運算相對於學習數字運算有着不小的難度。

在 20 世紀 70 年代末，英國中學數學與科學概念研究小組 SMS Mathematics team（Concepts in Secondary Mathematics and Science）對學生的數學概念學習做了廣泛的研究，找出了一些學生對字母的常見誤解。這裏舉出一些例子：

（1） 字母取值（letter evaluated）。例如，已知 $e+f=8$，求 $e+f+g$ 。一些學生會答 15，（8＋7），而非 $8+g$，因爲 g 爲第 7 個英文字母，這可能由於學生對答案保留一個字母感到不安。

（2） 把字母當成物體（letter as object）。由於小時後往往用 2 個蘋果（apple）、5 隻香蕉（banana），再多 1 個蘋果解釋 $2a+5b+a$ ；學生會把“1 英鎊(pound)等於 11 法郎(france)”寫成“ $p=11f$ ”。

（3） 沒有運用字母（letter not used）。例如，計算將 4 加以 $3n$ 時，會寫 $7n$ 或 7。

（4） 將字母看成未知數（letter as specific unknown）。

（5） 將字母看做一般化的數字（letter as generalised number）。例如，問已知 $c+d=0$ 及 c 小於 d，能得到 c 的甚

麼呢？一些學生只能給出一些特例，一些就會較系統的給出 $c = 1，2，3，4$。一些則可以更有系統的表述。

（6） 字母作爲變量（letter as a variable）。例如，若 $a = b + 3$，當 b 增加 2 時，a 會如何變化？有些學生會說“a 總是比 b 大 3”。有些則會說“這個 a 比這個 b 大 3”。

【案例 2-1】 $x/2y = (x/2)y$ 還是 $x/(2y)$？

分析： $f / g / h = f / (gh)$還是$(fh) / g$？嚴格來說，“+”和“×”等都是二元運算，因此 $3 + 4 + 5$ 和 $a \times b \times c$ 應分別寫作 $3 + (4 + 5)$ 及 $a \times (b \times c)$，究竟 $3 + 4 + 5 = 3 + (4 + 5)$ 還是$(3 + 4) + 5$ 呢？因加法滿足結合律，故可以把括號省掉。但除法就不能滿足結合律，$f / (g / h) \neq (f / g) / h$。故根本不應寫 $f / (g / h)$或 $x / 2y$。

第二節　多項式及其運算

符號拼在一起便成爲代數式，如 $3a\sqrt{9b} + \dfrac{6t^2}{s}$ 之類。多項式就是最簡單的代數式。它只涉及文字（符號）的正整數冪。簡單來說，多項式可定義成單項式的代數組合，如 $8xy + y^2 + 6x^2$ 等。而一元多項式就是形如 $\sum_{r=0}^{n} a_r x^r$ （$a_n \neq 0$）的代數式，所以學生在學過代數式之後，便集中詳細學習一元多項式。$\sum_{r=0}^{n} a_r x^r$ 這個表達方式雖然簡潔，但對於超過一元就不容易表示了。故此一般是先引入單項式，而多項式則是數個單項式以“+”的方式（已隱含了“−”）合起來就是了。

一、數域、一元多項式與多元多項式

1. 數域的定義

設 **P** 是由一些複數組成的集合，其中包括 0 與 1。如果 **P** 中的任意兩個數（這兩個數也可以相同）的和、差、積和商（除數不爲零）仍然是 **P** 中的數，那麼 **P** 就稱爲一個數域。

顯然，全體有理數組成的集合、全體實數組成的集合和全體複數組成的集合都是數域。這三個數域分別用字母 **Q**、**R** 和 **C** 來代表。全體整數組成的集合就不是數域，因爲不是任意兩個整數的商都是整數。

2. 一元多項式的定義

設 n 是一非負整數，形式爲

$$a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1x + a_0 \qquad ①$$

其中 $a_0, a_1, \cdots, a_n$（$a_n \neq 0$）全屬於數域 **P**，x 是一個文字，① 稱爲係數在數域 **P** 中的一元多項式，或者簡稱爲數域 **P** 上的一元多項式。

在多項式①中，a_ix^i 稱爲 i 次項，a_i 稱爲 i 次項的係數。若 $a_n \neq 0$，那麼 a_nx^n 稱爲多項式①的首項，a_n 稱爲首項的係數，n 稱爲多項式①的次數。係數全爲零的多項式稱爲零多項式，零多項式是唯一不定義次數的多項式。

以後我們用 $f(x), g(x), \cdots$ 等來代表多項式，並把所有係數在數域 **P** 中的一元多項式的全體，稱爲數域 **P** 上的一元多項式環，記爲 **P**[x]，**P** 稱爲 **P**[x]的係數域。

3. 多元多項式的定義

設 **P** 是一個數域，$x_1, x_2, \cdots, x_n$ 是 n 個文字，形式爲

$$ax_1^{k_1} x_2^{k_2} \cdots x_n^{k_n} \qquad ②$$

其中 a 屬於 **P**，$k_1, k_2, \cdots, k_n$ 是非負整數，②稱爲一個單項式。如果兩個單項式中相同文字的冪全一樣，那麼它們稱爲同類項。一些單項式的和就成爲 n 元多項式。

其中，$k_1 + k_2 + \cdots + k_n$ 稱爲單項式②的次數，當一個多項式表成一些不同類的單項式的和之後，其中係數不爲零的單項式的最高次數就稱爲這個多項式的次數。例如，多項式 $3x_1^2 x_2^2 + 2x_1 x_2 x_3^2 + x_3^3$ 的次數爲 4。

二、餘式定理、最大公因式與因式分解

在一元多項式環中，可以做加、減、乘三種運算，但是乘法的逆運算除法並不是普遍可以做的。因此，整除就成爲兩個多項式之間的一種特殊關係。

1. 帶餘除法

對於 $\mathbf{P}[x]$ 中任意多項式 $f(x)$ 與 $g(x)$，其中 $g(x) \neq 0$，一定有 $\mathbf{P}[x]$ 中的多項式 $q(x)$ 和 $r(x)$ 存在，使 $f(x) = q(x)g(x) + r(x)$ 成立，其中 $g(x)$ 的次數大於 $r(x)$ 的次數或者 $r(x) = 0$，並且這樣的 $q(x)$ 和 $r(x)$ 是唯一確定的。

帶餘除法中所得的 $q(x)$ 通常稱爲 $g(x)$ 除 $f(x)$ 的商，$r(x)$ 通常稱爲 $g(x)$ 除 $f(x)$ 的餘式。若 $r(x) = 0$，則稱多項式 $g(x)$ 能整除 $f(x)$，$g(x)$ 稱爲 $f(x)$ 的因式，$f(x)$ 可稱爲 $g(x)$ 的倍式

2. 因式分解

在中學代數裏我們學過一些將多項式因式分解的具體方法，把一個多項式分解爲不能再分的因式的乘積，所謂不能再分的概念，其實不是絕對的，而是相對於係數所在的數域而言的。例如，在有理數域上，把 x^4-4 分解爲 $(x^2-2)(x^2+2)$ 的形式就不能再分了，但在實數域上，就可以進一步分解成 $x^4-4 = (x-\sqrt{2})(x+\sqrt{2})(x^2+2)$，而在複數域上，還可以進一步分解成 $x^4-4=(x-\sqrt{2})(x+\sqrt{2})(x-\sqrt{2}i)(x+\sqrt{2}i)$。由此可見，必須在明確了係數域後，所謂不能再分才有確切的含義。

3. 最大公因式

如果多項式 $\varphi(x)$ 既是 $f(x)$ 的因式，又是 $g(x)$ 的因式，那麼 $\varphi(x)$ 就稱爲 $f(x)$ 與 $g(x)$ 的一個公因式。在公因式中具有特殊重要地位的是所謂最大公因式。

設 $f(x)$ 和 $g(x)$ 是 $\mathbf{P}[x]$ 中兩個多項式，$\mathbf{P}[x]$ 中多項式 $d(x)$ 稱爲 $f(x)$ 和 $g(x)$ 的一個最大公因式，如果它滿足下面兩個條件：

(1) $d(x)$ 是 $f(x)$ 和 $g(x)$ 的公因式；

(2) $f(x)$ 和 $g(x)$ 的公因式全是 $d(x)$ 的因式。

這裏需要注意的是，事實上 $\mathbf{P}[\mathrm{x}]$ 所在的 $\mathbf{P}$ 不一定要求是域。仔細考慮一下，便會發現，只要 $\mathbf{P}$ 是環（包含 0 和 1），則以上的各項討論仍然成立。取 $\mathbf{P} = \mathbf{Z}$（整數環）便是常用的例子。因此，以下的討論將允許 $\mathbf{P} = \mathbf{Z}$。

【案例 2-2】　$(x-2)$ 是不是 $(x-2)(x+3)$ 和 (x^2-4) 的最大公因式？ 那 $(\frac{x}{2}-1)$ 又如何？

分析：在整數環 $\mathbf{Z}[x]$ 中，$(x-2)$ 是 $(x-2)(x+3)$ 和 (x^2-4) 的一個公因式，同時也是它們的一個最大公因式，但 $(\frac{x}{2}-1)$ 就不是 $(x-2)(x+3)$ 和 (x^2-4) 的一個最大公因式，這是因爲 $\frac{1}{2}\notin\mathbf{Z}$；但如果在有理數域 $\mathbf{Q}[x]$ 或實數域 $\mathbf{R}[x]$ 中，$(\frac{x}{2}-1)$ 就是 $(x-2)(x+3)$ 和 (x^2-4) 的一個最大公因式。而且，$(x-2)(x+3)$ 和 (x^2-4) 的最大公因式有無數個，可以寫成 $k(x-2)$，其中 $k\neq 0$，且 $k\in\mathbf{Q}$ 或 $k\in\mathbf{R}$。另外，若限定在整數環上的多項式環 $\mathbf{Z}[x]$ 中，$(\frac{x}{2}-1)^2$ 與 (x^2-4) 也是沒有最大公因式的。

最大公因式從數字擴展到多項式，在大學數學系《高等代數》教科書中其定義是講得清清楚楚的，但爲何要如此擴展定義，以及使得最大公因式由（非零）正整數的一個（8 與 6 的最大公因數就只有 2）到（非零）整數的 2 個（± 2），及至多項式的無限個呢？

其實這裏隱含着一個定義域的問題。例如，當我們問：$6(x-2)^2$ 和 $15(x^2-4)$ 的最大公因式是甚麼時，我們隱含着在整數環 $\mathbf{Z}[x]$（甚或 $\mathbf{Z}^+[x]$）上進行運算之意。所期待的答案就是 $3(x-2)$。但若在有理數域 $\mathbf{Q}[x]$ 或實數域 $\mathbf{R}[x]$ 中求，則最大公因式應爲 $k(x-2)$，其中 $k\in\mathbf{Q}$ 或 $k\in\mathbf{R}$。因此，在尋找這類問題的最大公因式時，最好是說明定義域。

在討論多項式的最大公因式的定義時，我們先證明定理：兩數的公因數都是其最大公因數的因數。

首先，我們假設 $a_1, a_2, \ldots, a_k$ 爲整數，p 爲 $a_1, a_2, \ldots, a_k$ 的最小公倍數。先證一引理。

引理： $a_1, a_2, \ldots, a_k$ 的公倍數是其最小公倍數 p 的倍數

證： 若有一個 $a_1, a_2, \ldots, a_k$ 的公倍數 q 卻不是 p 的倍數，我們用 q 被 p 除，得出

$$q = pr + s\,,\ 0 < s < p$$

即 $s = q - pr$。

由於 q 及 p 可被 $a_1, a_2, \cdots, a_k$ 整除，故 s 可被 $a_1, a_2, \cdots, a_k$ 整除，即 s 爲 $a_1, a_2, \cdots, a_k$ 的公倍數，且 $0 < s < p$。這與 p 爲最小公倍數的假設矛盾，故 $s = 0$。從而 q 必爲 p 的倍數。引理證畢。

定理的證明：

設 $c_1, c_2, \ldots, c_k$ 爲 a 和 b 的公因數的全體，D 爲 a 和 b 的最大公因數。考慮 $c_1, c_2, \ldots, c_k$ 的最小公倍數 L。由引理知，L 整除 a 及 b，即 L 爲 a 和 b 的公因數。因爲 a 及 b 分別爲 $c_1, c_2, \ldots, c_k$ 的公倍數，故而 $L \le D$。

由於 a 和 b 的最大公因數 D 是 $c_1, c_2, \ldots, c_k$ 中的一項，故 $D \le L$。從而 $D = L$。

最後，考慮 a 和 b 的任意公因數 c，由於它不總是 $c_1, c_2, \ldots, c_k$ 中的一項，故 $D = L$ 必爲 c 的倍數！亦即 c 爲 D 的因數。定理證畢。

當問題轉到多項式時，就沒有最大數值可言，當然也不能比較冪。所以兩個多項式 p 和 q 的最大公因式是如此定義的：

d 是 p 和 q 的最大公因式當且僅當

（1）$d\,|\,p$ 及 $d\,|\,q$；

（2）若有 d'，使得 $d'|\,p$ 及 $d'|\,q$，必有 $d\,|\,d'$（而不是數字上的 $d'<d$）。

用這個定義，$1-x$ 及 $x-1$ 兩個都是 x^2-1 及 $(1-x)(x-2)$ 的最大公因式。

三、 多項式除法

我們知道，**R** 是一個域，任何實數可以除以另一個非零實數，結果仍是一個實數。**R**[x]只是一個環，故多項式除以多項式不一定是多項式。這就如同在整數環 **Z** 中討論除法一樣，整數除以整數不一定是整數（如 1 ÷ 2），但是我們仍然可以談“整除（因數）”和“餘數”的概念。同理，在環 **R**[x]中，也可以討論“整除（因式）”和“餘式”的概念。學生也就會接觸到相關的餘式定理、因式定理等。與從 **Z** 擴展到 **Q** 相似，從 **P**[x] 到分式，因爲分式是一個域，故分式除以非零分式，仍是分式。當然我們要稍爲處理一下分母：分母雖然非零，但可有局部取零的情況，例如 $\dfrac{x^2-1}{x-1}=x+1$。在這種情況，“=”要重新定義：若存在一個有限集 **C**（包括 0 的集），對於所有 $x\in$ **R** 或 $x\in$ **C** 都有 $f(x)=g(x)$，則 $f=g$。

第三節　方程、函數與不等式

一、一元二次方程

假設方程解未知數是恆久以來想處理的問題，學生在小學階段就開始接觸了，但方程林林總總，最簡單的要算是多項式

方程，其中一元一次方程最易求解。例如，$ax+b=c$，a、b 和 c 爲已知實數且 $a\neq 0$，則 $x=\dfrac{c-b}{a}$。

一元二次方程是中學數學中的重要且最基本的內容，教師在課堂上通常用正方形的面積與邊長的關係，以及圓的面積與半徑的關係等讓學生看到現實世界裏確實存在不少一元二次的關係（如自由落體），於是要學習解一元二次方程便是很自然的事。當然如果所有一元二次關係都只屬於 $x^2=a^2$ 的形式就簡單了，容易得 $x=\pm a$。但是實際情況並不是這麼簡單，一般的一元二次方程就是形如 $ax^2+bx+c=0\,(a\neq 0)$，在 x^2 項和常數項之外還有一個 bx，故不能直接開方。中國古代就叫這個方法做“帶從開方術”，就好似帶着“bx”這個“侍從”一樣。所以我們要千方百計把一元二次方程分拆成 $x+\square=\Delta$ 的模式，亦即因式分解成（兩個）一次（線性）的方程。由於我們已經懂得解一次方程，問題就迎刃而解了。而要做到這點，最重要是利用“若 $AB=0$，則 $A=0$ 或 $B=0$”的這個關係。

1. 配方法

在中學階段，我們學習了很多解一元二次方程的方法，若對於比較簡單的一元二次方程，如 $x^2-4=0$，$(2x-1)^2-(x+2)^2=0$ 等，只要利用 $x^2-a^2=(x-a)(x+a)$ 就可以很快捷地解決了。但是形如 $x^2-6x+5=0$ 等的一元二次方程，方程的根不是那麼明顯能夠求得。

然而，我們知道

$$(x-3)^2=4 \Leftrightarrow x^2-6x+9=4 \Leftrightarrow x^2-6x+5=0\text{。}$$

因爲兩個形式不同的方程會有相同的根，因此任何一個一元二次方程，若能化成$(ax+b)^2=c^2$的形式時，那樣方程便變得容易求解。這也是我們要學習配方法的原因。

要熟練地對二次三項式進行配方，關鍵在於熟練地運用$a^2+2ab+b^2=(a+b)^2$，即看到a^2+b^2想到找$2ab$，或者看a^2+2ab想到找b^2。這裏我們試舉一例，好讓學生能努力形成良好的配方感覺。

【案例 2-3】　運用配方法求一元二次方程$x^2-7x-15=0$的根。

分析：把x^2-7x看成$x^2+2\cdot(-\frac{7}{2})\cdot x$，故把方程$x^2-7x-15=0$變化成$x^2-7x+(-\frac{7}{2})^2-(-\frac{7}{2})^2-15=0$，從而配方成$(x-\frac{7}{2})^2=\frac{109}{4}$，因此得出方程的根是$x=\frac{7\pm\sqrt{109}}{2}$。

2. 一元二次方程的一般解

其實配方法未必像大家想象中那樣可怕，它本身也是值得學習而極美妙的方法。中國人和阿拉伯人在很久以前就懂得了。

上面說過，如果所有一元二次方程都像

$$(ax+b)^2=c^2 \qquad ①$$

則一切都變得簡單了。配方法的目的就是要達至這樣的“理想國”，如圖 2-1 所示。

以$x^2+6x-9=0$爲例，我們的目的是把有x的項（$x^2, 6x$）

“合起來”，於是硬性地將左邊變成 $[x^2+2(3)x+(3)^2]-9$。

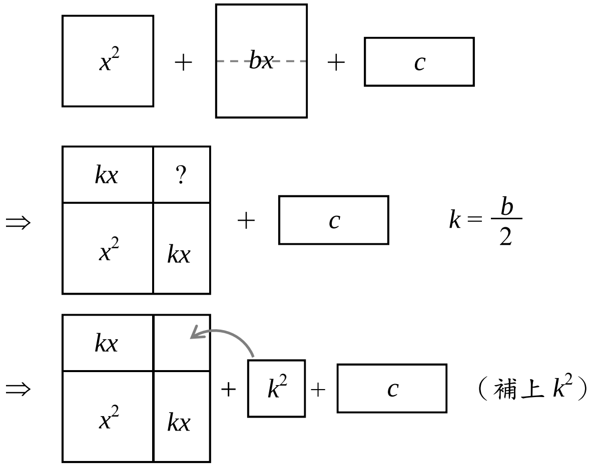


圖 2-1 配方法

要能做到這樣，我們事實上硬性地加上了 $(3)^2$，爲了保持“=”這個“天秤”，於是就得出

$$[x^2+2(3)x+(3)^2]-9=(3)^2\text{。}$$

顯然，左邊的 $x^2+2(3)x+(3)^2$ 就可以組合起來（也就是配方）成爲 $(x+3)^2$，化簡後得出：$(x+3)^2=18$。這就是我們所渴望的①的模式了。

所以　　$x+3=\pm\sqrt{18}$。

解得 $x=-3+\sqrt{18}$ 或 $-3-\sqrt{18}$，即 $x=-3+3\sqrt{2}$ 或 $-3-3\sqrt{2}$。

假如 x^2 的係數不是 1，只需把整個算式除以該係數就可以了。例如：

$$3x^2 - 7x - 9 = 0$$

$$x^2 - \frac{7}{3}x - 3 = 0$$

$$x^2 - 2(\frac{7}{6})x + (\frac{7}{6})^2 - (\frac{7}{6})^2 - 3 = 0$$

$$(x - \frac{7}{6})^2 - \frac{157}{36} = 0$$

$$(x - \frac{7}{6})^2 = \frac{157}{36}$$

$$x - \frac{7}{6} = \frac{\pm\sqrt{157}}{6}$$

$$x = \frac{7 \pm \sqrt{157}}{6}$$

利用相同的方法，對一般的一元二次方程

$$ax^2 + bx + c = 0 \quad (a \neq 0)\text{，}$$

可得到公式作一般解：

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}\text{。}$$

事實上，我們也可把 ax^2+bx+c $(a\neq 0)$ 進行因式分解。

$$\begin{aligned} ax^2+bx+c &= a(x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}) \\ &= a[x^2+\frac{b}{a}x+(\frac{b}{2a})^2-(\frac{b}{2a})^2+\frac{c}{a}] \\ &= a[(x+\frac{b}{2a})^2-\frac{b^2-4ac}{4a^2}] \end{aligned}$$

$$= \quad a[(x+\frac{b}{2a})^2-(\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a})^2]$$

$$= \quad a(x+\frac{b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a})(x+\frac{b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a})$$

顯然，若 $b^2-4ac>0$，一元二次方程 $ax^2+bx+c=0$ 有二相異實根；若 $b^2-4ac=0$，有重（實）根；而若 $ax^2+bx+c<0$，則有兩相異非實根（虛根），而該兩虛根互爲共軛。

綜上所述，所謂一元二次方程的求根公式，其實就是一元二次方程的一般解，但本質上實爲配方法，而 $\Delta=b^2-4ac$ 起着判別一元二次方程根性質的作用，故稱判別式。

從一元二次方程公式解中，我們可發現 b^2-4ac 對解的屬性起了判定性的作用。因此，我們定義 $\Delta=b^2-4ac$ 爲一元二次方程 $ax^2+bx+c=0$ 的判別式，並得知（i）當 $\Delta>0$ 時，方程有兩個不同實根；（ii）當 $\Delta=0$ 時，方程有兩個數值相同的實根；（iii）當 $\Delta<0$ 時，方程沒有實根，或方程有一對共軛虛根。因此，在我們不需要確切找出 $ax^2+bx+c=0$ 的解時，判別式 $\Delta=b^2-4ac$ 可幫助我們很快地判斷出它有多少個實根。

3. 一元二次方程的根與係數的關係

回顧一元二次方程解的一般式，不難得到 $x=\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ 實際上是形如 $x=A\pm\sqrt{B}\,(B\geq 0)$。反過來，即形如 $A\pm\sqrt{B}$ 的數是否一定是一元二次方程的根呢？

爲此，很自然地我們會問：既然這兩個根可以用一元二次方程的係數來表示，那麼這兩個根的和及積與一元二次方程的係數之間又是甚麼關係？下面我們從兩個不同的角度進行推導。

角度一（以舊引新）：
由一元二次方程 $ax^2+bx+c=0\left(a\neq 0\right)$ 的求根公式：

$$x_1=\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}，x_2=\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}，$$

故 $x_1+x_2=-\frac{b}{a}$，$x_1x_2=\frac{c}{a}$。

角度二（抽象性）：
如果一元二次方程 $ax^2+bx+c=0\left(a\neq 0\right)$ 的兩根爲 x_1 和 x_2，那麼就有

$$ax^2+bx+c=a\left(x-x_1\right)\left(x-x_2\right)。$$

比較兩邊對應項係數,得

$$x_1+x_2=-\frac{b}{a},\ x_1x_2=\frac{c}{a}。\qquad ②$$

上面的②式，人們稱之爲韋達定理，即根與係數的關係。需要指出的是，給定一元二次方程 $ax^2+bx+c=0\left(a\neq 0\right)$ 就一定有②式成立；反過來，如果有兩數 x_1 和 x_2 滿足②式，那麼這兩數 x_1 和 x_2 必是一個一元二次方程的根。

根與係數的作用是多方面的，有些時候，x_1 和 x_2 是相當複雜的，若只需要求出 x_1+x_2 及 x_1x_2，而非直接求出 x_1 和 x_2，利用根與係數關係會比較快捷。例如要解決下面的問題：求方程

$x^2-78x-96=0$兩個根的積，若直接求出兩根就麻煩了，利用根與係數關係馬上可以知道兩個根的積爲-96。又如，已知一元二次方程 $ax^2+bx+c=0\left(a\neq 0\right)$ 的兩根x_1和x_2，求兩根x_1和x_2的某些組合如 $x_1^2+x_2^2$、$\left(x_1-x_2\right)^2$、$x_1^3+x_2^3$等問題時，可儘量將這些組合化爲x_1+x_2和x_1x_2。

$$x_1^2+x_2^2 = \left(x_1+x_2\right)^2-2x_1x_2\text{；}$$
$$\left(x_1-x_2\right)^2 = \left(x_1+x_2\right)^2-4x_1x_2\text{；}$$
$$x_1^3+x_2^3 = \left(x_1+x_2\right)\left[\left(x_1+x_2\right)^2-3x_1x_2\right]\text{。}$$

另外，利用根與係數的關係，我們可以在不直接求一元二次方程$ax^2+bx+c=0\left(a\neq 0\right)$的根時，就能知道其根的正、負性。在$\Delta=b^2-4ac\geq 0$的條件下，我們有如下的結論：

當$\dfrac{c}{a}<0$時，方程的兩根必一正一負。又若$-\dfrac{b}{a}\geq 0$，則此方程的正根不小於負根的絕對值；又若$-\dfrac{b}{a}<0$，則此方程的正根小於負根的絕對值。

當$\dfrac{c}{a}>0$時，方程的兩根同正同負。又若$-\dfrac{b}{a}>0$，則此方程的兩根均爲正根；又若$-\dfrac{b}{a}<0$，則此方程的兩根均爲負根。

【案例 2-4】 已知直角三角形$\triangle ABC$的周長爲 14，面積爲 7，試求它的三邊。

分析：設直角三角形$\triangle ABC$的邊長分別爲a、b和c，則有

$$a+b+c=14,\quad \frac{1}{2}ab=7,\quad a^2+b^2=c^2\text{，}$$

所以 $c^2=a^2+b^2=(a+b)^2-2ab=(14-c)^2-2\times14$，解得 $c=6$ 。於是 $a+b=14-6=8$ 及 $ab=14$ 。

從而 a 和 b 是一元二次方程 $x^2-8x+14=0$ 的兩根，解得 $x=4\pm\sqrt{2}$ 。故直角三角形 $\triangle ABC$ 的三邊長分別爲 $4-\sqrt{2}$, $4+\sqrt{2}$, 6。

二、方程論的基本認識

在求解了一元二次方程之後，人們開始尋找一元 n 次方程的通（代數）解。16 世紀以前，對於一般的一元二次方程已經有了公式的解法，這時的公式還不是如今用符號表示的一個統一的式子，而是解題過程可以按照一定的步驟進行。斐波那契（Fibonnaci, 1170-1250）在歐洲最早給出一元三次方程的數值解法，也曾探討了 $x^3+2x^2+10x=20$ 的解，並證明其根不能寫成 $\sqrt{a+\sqrt{b}}$ 的形式。在 15 世紀末，一些意大利數學家爲解一元三次方程及一元四次方程作出努力，並取得了一些成果。如費爾路（Scipione del Ferro, 1456-1526）和塔爾塔利亞（Tartaglia, 1500-1557）都發現了求解某些一元三次方程的方法，如形如 $x^3+px^2=q$ 和 $x^3+px=q$ 的方程。卡爾丹諾（Girolamo Cardano, 1501-1576）在《大法》（*Ars Magna*）中詳細論述了求解 $x^3+px=q$ 的方法，該方法的要點及相關討論可參看附錄 4。

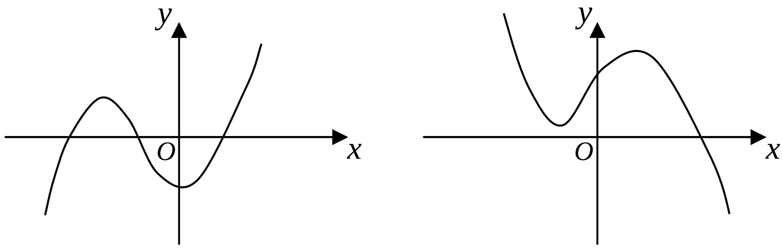
但嘗試求解一般的一元五次方程卻久攻不破。這個嘗試經歷了 250 年之久，直到 1824 年由阿貝爾（Niels Henrik Abel, 1802-1829）證明了：除去係數取得特殊數值的情況以外，高於四次的一元方程，一般不能用開方求解(solving by radicals)。然而，一般高於四次的一元方程的解在何時可以用開方法求得

呢？這個問題則直到天才數學家伽羅華（Évariste Galois, 1811-1832）的參與，問題才有完滿的答案，這就是著名的伽羅華理論。他發展出的群論的觀點去討論方程的求解過程，其中的分析需要考慮到 $\{r_1,\ldots,r_n\}$ 所組成的置換群的性質，其中 r_i $(1\le i\le n)$ 爲 n 次方程的根。

當時的數學家們也開始研究根與係數間的關係。對於一元二次方程 $ax^2+bx+c=0$，若兩根爲 α 和 β（不管虛實也不管是否相關），因 $ax^2+bx+c\equiv a(x-\alpha)(x-\beta)$，通過比較等式兩邊未知數的係數，有 $\alpha+\beta=-\dfrac{b}{a}$ 和 $\alpha\beta=\dfrac{c}{a}$。對於一元三次方程 $ax^3+bx^2+cx+d=0$，若其根爲 α，β 和 γ，則有 $ax^3+bx^2+cx+d\equiv a(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)$，類似可以得到，$\alpha+\beta+\gamma=-\dfrac{b}{a}$、$\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=\dfrac{c}{a}$ 及 $\alpha\beta\gamma=-\dfrac{d}{a}$。對其他的高次一元方程可類推。

這當然只局限於“多項式”方程，而在 $\mathbf{C}[x]$ 中的討論才比較完整。因爲根據代數基本定理，所有係數屬於 $\mathbf{C}$ 的多項式必有一在 $\mathbf{C}$ 的根。用數學歸納法可以證明所有 n 次多項式均有 n 個根，這就是 $\mathbf{C}$ 爲代數封閉的意思。$\mathbf{C}$ 也爲 $\mathbf{R}$ 的代數封閉體（algebraic closure）。如果根不是實根，則互相共軛。因此，雖然我們現在的中學教學中不涉及 $\mathbf{C}[x]$，但對於 $\mathbf{R}[x]$ 我們知道，若 n 爲奇數，必至少有一實根。這也可有另一種證法，利用介值定理（Intermediate Value Theorem）。對於 $f(x)=\sum_{r=0}^{n}a_rx^r$，若 n 爲奇數，$\lim_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$，$\lim_{x\to-\infty}f(x)=-\infty$，因 $y=f(x)$ 連續，故總存在一個 $x_0\in\mathbf{R}$，使 $f(x_0)=0$。從 $y=f(x)$ 的圖像上看，$y=f(x)$ 必最少穿過一次 x 軸。一般來說，若 n 爲奇數，

它有 $n-1$ 個拐點（當然有退化的情況）。$y=f(x)$ 的形狀如下：

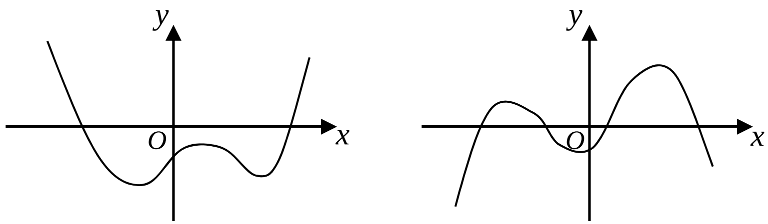


（$n=3$ 的情況）
$a_n>0$

（$n=3$ 的情況）
$a_n<0$

圖 2-2　多項式方程與函數圖像（n 爲奇數）

而若 n 爲偶數，則形如：



（$n=4$ 的情況）
$a_n>0$

（$n=4$ 的情況）
$a_n<0$

圖 2-3　多項式方程與函數圖像（n 爲偶數）

三、函數

1. 函數及函數概念

函數概念作爲貫穿中學和大學數學的一個重要知識，對於數學教學的開展起着至關重要的作用。函數概念的發展經歷了

幾個世紀的演變。今天我們所熟知的教科書中關於函數的定義已經是許多“版本”改良後的結果。函數這個術語在中國出現，來自李善蘭（1811-1882）和 Alexander Wylie 共同翻譯的《代微積拾級》一書。“函數”的含義是“包含的量”，解釋爲“如果一個變量包含着另一個變量，那麼前者是後者的“函數”。

因爲“函”這個字是包在外面有盒的意思，如“書函”（大約今天的信封）。古籍之線裝書有一個外殼保護，亦叫函。函數英文叫 function，字義爲“作用”，如 $\sin x$ 就是正弦函數對 x 產生作用。

在當前中國內地的中小學數學課程中，在初中階段始出現這一概念，主要强調的是變量之間的依賴關係，其定義是：在一個變化過程中，如果有兩個變量 x 與 y，並且對於 x 的每一個確定值，y 都有唯一確定的值與其對應，則稱 y 是 x 的函數。及至高中階段，運用集合與對應的語言刻畫，函數被定義爲：給定兩個實數集合 A，B，對集合 A 的任一元素 a，在集合 B 中存在唯一元素 b 與之對應，稱這個對應關係 f 爲集合 A 到集合 B 的一個函數關係，簡稱函數。

從歷史的發展可以看到，函數概念前前後後包含了表、曲線、解析表達式、對應關係、有序數對集等理念。其中一一對應關係可算是當今最常用的定義。其主要原因是爲了把數學挪到集合這個基礎上，爲此數學家又進一步把函數定義爲帶序三元組 $(\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{F})$，$\mathbf{F} \subset \mathbf{A}\times\mathbf{B}$，其中適合兩個條件：

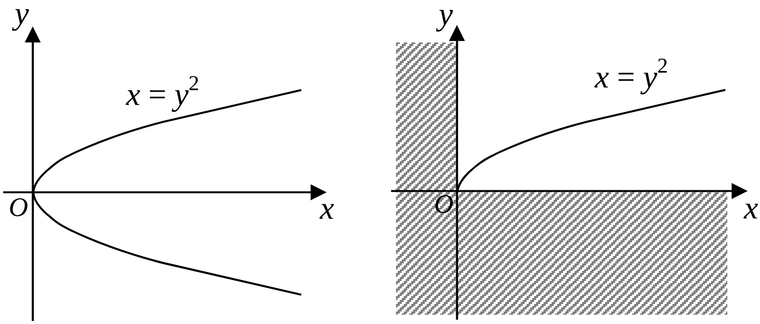
a）$\forall\, a \in \mathbf{A}$，$\exists\, b \in \mathbf{B}$，有$(a, b) \in \mathbf{F}$；

b）若 $(a, b) \in \mathbf{F}$，$(a, b') \in \mathbf{F}$，那麼 $b = b'$。

由於堅持要把所有東西均須用集合語言來書寫，他們還要先定義帶序三元組。首先 (x, y) 的定義是$\{\{x\}, \{x, y\}\}$，而$(x, y,$

$z) = ((x, y), z)$。這裏 **A** 稱爲函數的定義域（domain），**B** 稱爲函數的值域（range），**F** 稱爲函數的圖像。

何以定義得這麼複雜？不難看出，要表明一個關係是否函數，除了“方程”（相關的圖像）外，還要看定義域和值域，例如，$x = y^2$。一般不是由 x 到 y 的函數，但（$\mathbf{R}^+, \mathbf{R}^+, \mathbf{F}$）（其中 $\mathbf{F} : \{(x, y) : x = y^2\}$）就是函數了。



(a) 不是函數　　(b) 是由 $\mathbf{R}^+$到 $\mathbf{R}^+$的函數

圖 2-4　函數與否要看定義域

從上述歷史回顧，我們可以瞭解到，縱使現時函數有其標準的定義，其實它蘊含着多種想法。例如螺線 $\rho = \theta$，如圖 2-5 所示在圖上呈現着一條曲線，吻合早期它是函數的想法，但它卻在直角坐標系中不滿足函數的定義，然而若考慮極坐標，它又變回一個函數了。如此種種，學生學習函數時會產生種種的誤解也是可以想象的。

在學習數學不同階段對函數有着不同的要求，Nicholas 曾總結出教科書中的函數定義類型主要有三種：1）函數用變量定義；2）函數用集合定義；3）函數用對應法則定義。此外，還有將函數與計算機或機器模擬，由輸入—輸出（input-output）

定義，如圖 2-6 所示。

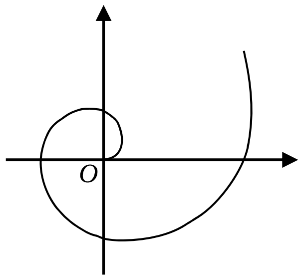


圖 2-5 螺線

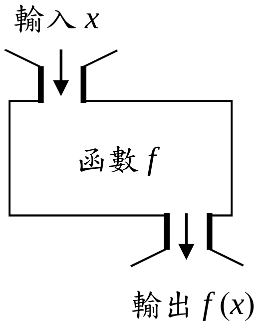


圖 2-6 函數機器

現代定義下的函數强調的是集合之間的對應關係，在數學教學中，常用的表示方法有三種：解析法、列表法和圖像法。不同的方法有其各自的特點。

解析法有兩個優點：一是可以簡明、全面地概括變量間的關係；二是可以通過解析式求出任意一個自變量的值所對應的函數值。例如，由 $y=\dfrac{x+2}{x-1}$ 可知，如果任意給出自變量 $x\neq 1$ 的值，即可求得因變量 y 的值。如當 $x=2$ 時，$y=\dfrac{2+2}{2-1}=4$。

圖像法的優點是直觀形象地表示自變量的變化，以及相應的函數值變化趨勢，有利於我們通過圖像來研究函數的某些性質。例如，由圖 2-7 可以立刻知道，函數 $y=f(x)$ 在區間 $(-\infty,\ 0]$ 上是減函數，在區間 $[0,\ +\infty)$ 上是增函數。但是利用圖像法，則未能準確得知每個在定義域內 x 的相對應函數值。

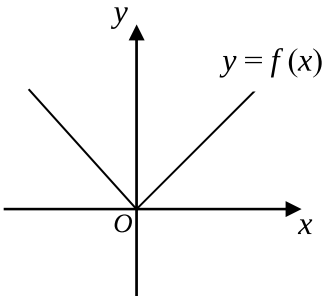


圖 2-7 圖像表示法

筆記本數 x	1	2	3	4	5
所需錢數 y	5	10	15	20	25

圖 2-8 列表表示法

列表法的優點是不需要計算就可以直接看出與自變量的值相對應的函數值，這種方法在實際生產和生活中也有廣泛應用。例如，某種筆記本的單價是 5 元，買 x（$x \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$）個筆記本需要 y 元，我們只要列出表格來表示，就可以知道 x 和 y 之間的關係，如圖 2-8 所示。但是利用列表法，我們則只能得出有限個數的函數值。

2.函數的圖像

我們知道，函數及其圖像有着不可分割的關係。以解方程來說，圖解、數值解與代數解同樣重要。中學數學學習接觸到的函數，大多能用解析式表達出來。例如，列表中的自變量 x（使用電量度數）及因變量 y（電費總額）能借由 $y = 10 + 2x$ 去反映兩變量間之關係，但若以圖像的形式表達出來，這種增長的趨勢就更爲明顯（圖 2-9）。

那麼如何畫出一個函數的圖像呢？通常我們使用描點法。即選擇一些特殊值的自變量 x 的值，依據函數關係式得到相應的因變量 y 的值，然後將這些有序對 (x, y) 表示的點標示在直

x	0	1	2	3	4
y	10	12	14	16	18

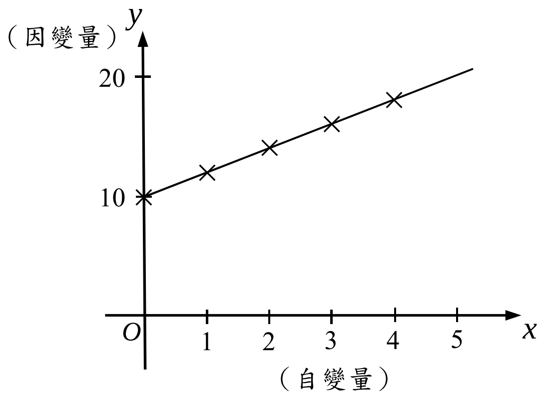


圖 2-9 函數的圖像

角坐標平面上，再依次將這些點連接起來。

【案例 2-5】 一次函數 $y = ax + b$ 的圖像爲甚麼是直線？

分析：在初中階段，數學教師常見的回答是：首先畫出幾個特例（如 $y = 2x + 1$、$y = 6x + 4$ 和 $y = 5x - 8$）的圖像，表明它們均是直線，然後再畫一些如 $y = x^2 + 2x - 3$ 之類的反例，用歸納法作出結論。

或者讓學生用多描幾個點的方法感受並猜想一次函數 $y = 2x + 1$ 的圖像，如圖 2-10 所示可能是直線，然後探索並理解直線由“點和傾斜角”唯一確定，接着看看當點 P(1, 3)的橫坐標變成 $1 + t$ 時，根據函數解析式算得相應的縱坐標變成 $2(1 + t) + 1 = 3 + 2t$，從圖像上看，當 $x = 1$ 水平方向移動 t 個單位，$y = 3$ 就垂直方向移動 $2t$ 個單位移到 $3 + 2t$，即新舊點連線的傾斜

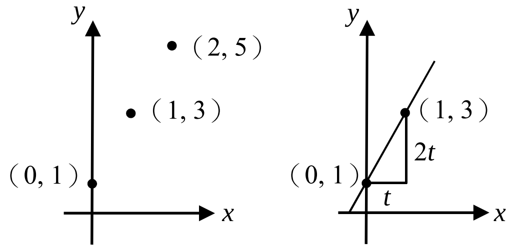


圖 2-10　$y = 2x + 1$ 的圖像

角的正切值均是 2，與 t 無關。既然是傾斜角恆不變（在初中教材中，沒有出現斜率的概念），因此 $y = 2x + 1$ 的圖像便是直線。當然，對於基礎好的學生，可以讓學生嘗試給出一般的一次函數 $y = kx + b$ 的圖像是直線的證明。

高中學生接觸到傾斜角、斜率等基礎知識，因此，教師可以用數學知識直接引導學生解決。解答如下：

對於任意不重合的三點 $P_1(x_1, y_1)$、$P_2(x_2, y_2)$、$P_3(x_3, y_3)$，均有 $y_i = kx_i + b$　（$i = 1, 2, 3$）。

從而　$$\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{(kx_2 + b) - (kx_1 + b)}{x_2 - x_1} = k \quad ,$$

且　$$\frac{y_3 - y_1}{x_3 - x_1} = \frac{(kx_3 + b) - (kx_1 + b)}{x_3 - x_1} = k \quad ,$$

所以　$$\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{y_3 - y_1}{x_3 - x_1} \quad 。$$

此即表明，由點 P_1, P_2 確定的直線 P_1P_2 與由點 P_1, P_3 確定的直線 P_1P_3 的斜率相等，從而這三點重合，因而 $y = kx + b$ 的圖像是直線。

上述解答方法構成了學生的基本解題策略，這種解題策略可以遷移到三點共線的證明中。現時透過繪圖計算器或計算機

軟件，繪圖變得容易很多。但這種繪圖（點態的）仍只能在指定的範圍來進行，借助微積分（找出極值、拐點、漸近線等）則可對函數圖形作整體性的描繪。這便是繪圖（plot）和描繪（sketch）的區別。

繪製函數圖像所涉及的內容很多。例如，根據函數關係式描點作圖，選擇甚麼樣的點對於不同的函數會有所不同。以二次函數爲例，我們會關注其頂點（對稱軸與圖像的交點）及其與坐標軸的交點。對於三角函數亦是如此，而對於指數函數和對數函數，則主要考慮其與坐標軸的交點和漸近線。另外，函數解析式中的參數往往在圖像上有其特定的含義，如下列二次函數，如圖 2-11 所示。

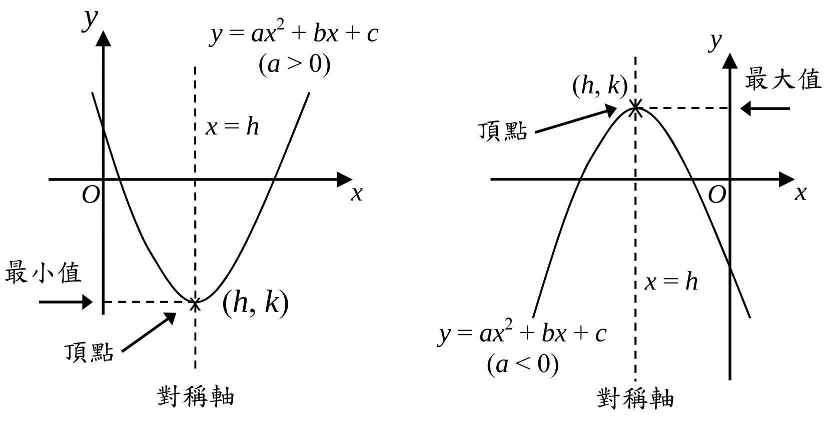


圖 2-11 二次函數圖像

在 a、b 和 c 都是實數的前提下，a 的正負號決定了 $y = ax^2 + bx + c$ 這個拋物線的“開口”向上還是向下，而 Δ 則決定了拋物線與 x 軸有多少個交點，如圖 2-12 所示。

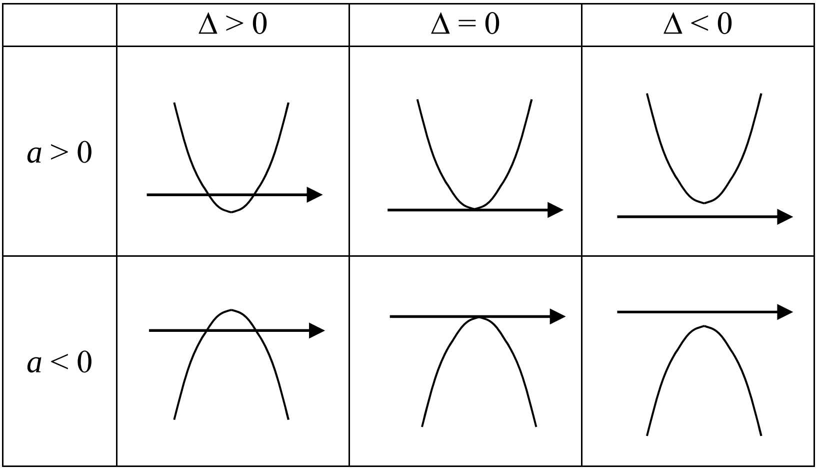


圖 2-12　二次函數圖像與 x 軸交點

除了繪製函數圖像，對圖像的理解還包括一些圖像變化。例如， 如果坐標圖上的每點 (x, y) 向上移動 3 個單位，那麼每點的新坐標就是 $(x, y + 3)$，而新的函數將轉變爲 $y = g(x)$。透過列表的方式，我們可以清楚觀察到新舊函數之間的變化：

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$f(x)$	9	4	1	0	1	4	9
$g(x)$	12	7	4	3	4	7	12

從上表我們可以看到

$g(-3) = f(-3) + 3$，

$g(-2) = f(-2) + 3$，

$g(-1) = f(-1) + 3$，

…

從規律來看，我們會知道對任意一個 x，假如設定其中一個 x 為 x_0，都有 $g(x_0)=f(x_0)+3$。

因此，$y=f(x)$ 及 $y=g(x)$ 之間的關係可以歸納爲

$$g(x)=f(x)+3。$$

如圖 2-13 所示。

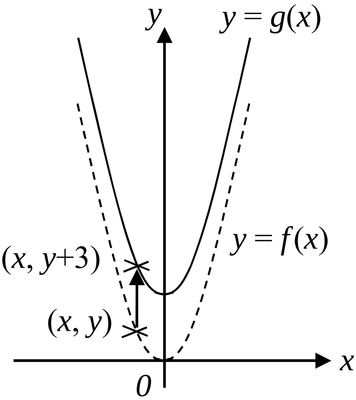


圖 2-13 圖像變化

同樣地，也可以將 $y=f(x)$ 向右平移，如圖 2-14 所示。

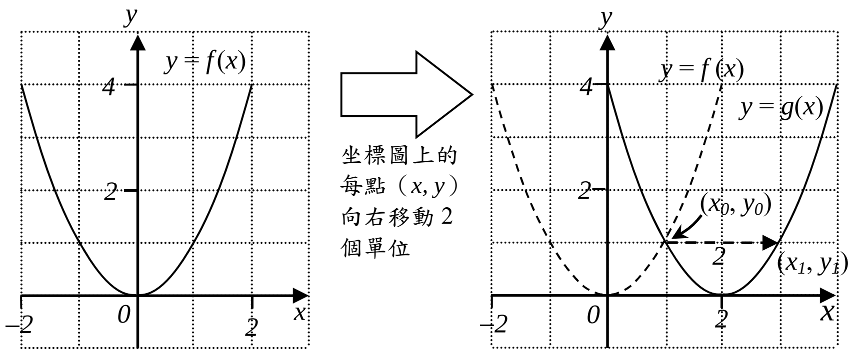


圖 2-14 圖像的平移

除了平移變化外，函數圖像還會有拉伸。例如，$y=\frac{1}{2}f(x)$ 表示當圖像 $y=f(x)$ 縮減至 y 軸原來的 $\frac{1}{2}$。而 $y=\frac{1}{2}f(x)+2$ 表示將圖像 $y=f(x)$ 先縮減至 y 軸原來的 $\frac{1}{2}$，再將圖像 $y=\frac{1}{2}f(x)$ 向上移動 2 單位，如圖 2-15 所示。

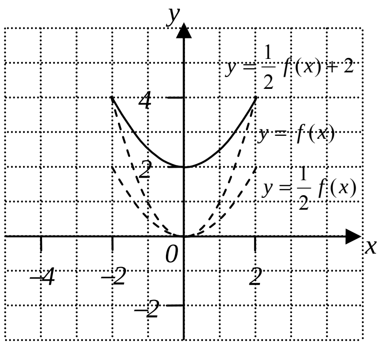


圖 2-15　圖像的拉伸

另外，我們還會對函數圖像實施對稱變換。如圖 2-16 即將函數圖像（實線部分）按 x 軸對稱過來（虛線部分）。

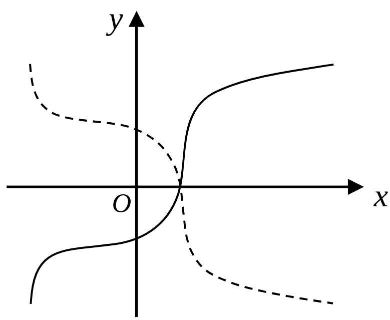


圖 2-16　沿 x 軸對稱

綜合上述例子，我們可以將函數的圖像變化情況總結如下：

幾何變換	代數變換
向上移動 k 單位	$f(x)+k$
向下移動 k 單位	$f(x)-k$
向右移動 h 單位	$f(x-h)$
向左移動 h 單位	$f(x+h)$
x 軸反射	$-f(x)$
y 軸反射	$f(-x)$
沿 y 軸放大至原來的 a 倍	$af(x)$
沿 x 軸縮小至原來的 $1/a$	$f(ax)$

在學習函數圖像時，學生有時會難於理解特定函數與一般函數之間的轉換。上表中總結的規律其實與特定函數無關。換言之，我們並不需要知道函數 f 是甚麼，也能得出上述的結論。

函數圖像和方程、不等式結合得很緊密，我們有時會使用圖解法來處理問題。例如，對於某個函數 $f(x)=ax^2+bx+c$ 來說，圖 2-17 除了展示 $y=f(x)$ 的圖像外，還標示了兩個縱軸區間 R 和 S 及三個橫軸區間 I、II 和 III。圖中，縱軸區間（R）表示 $f(x)\geq 0$，縱軸區間（S）表示 $f(x)<0$，及其相對應的 x 值均屬於橫軸區間（I / II / III）。

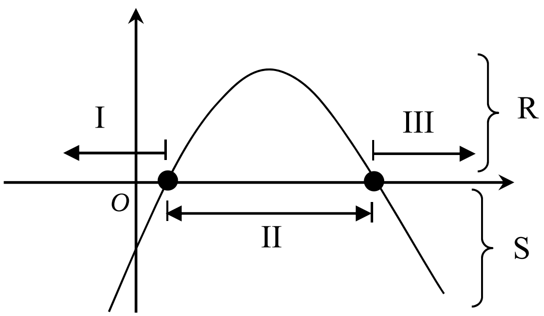


圖 2-17 函數圖像與不等式

在求解 $f(x)>k$ 時，我們只要加一直線 $y=k$ 到圖像 $y=f(x)$ 便可。如圖 2-18，橫線 $y=k$ 與圖像 $y=f(x)$ 相交，在 x 軸以上的區間，即是 x 的值在區間 II 及 IV 的部分，$f(x)=k$ 的根就是相應的相交點的位置了。

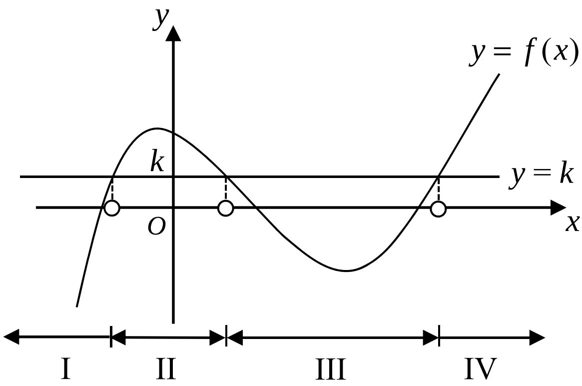


圖 2-18 函數圖像與方程、不等式

對於圖 2-19 中所示 $y=f(x)$ 的圖像，其中 $f(x)$ 爲二次函數，我們不難得到 $f(x)<3$ 的解（$a<x<d$）。

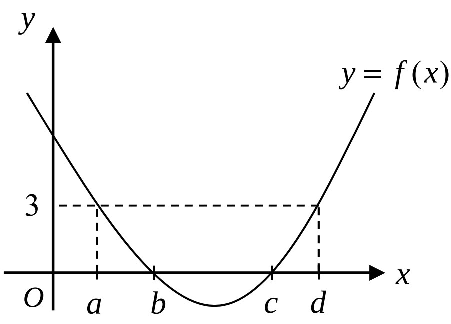
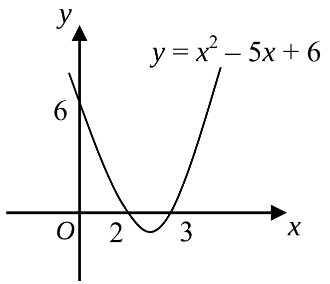


圖 2-19　$f(x)<3$ 的解集

下面我們再舉出幾個圖解法的例子，讀者可自行求解：

（i）在直角坐標系中的二次方程線段：例如，求解

$x^2+5x+6=0$。如圖 2-20 所示。



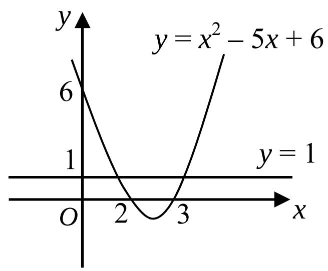


圖 2-20　$x^2-5x+6=0$ 的解　　圖 2-21　$x^2-5x+6=1$ 的解

（ii）二次方程線段及一水平線：例如，求解 $x^2-5x+6=1$ 或 $x^2-5x+5=0$。如圖 2-21 所示。

（iii）二次方程線段及一直線：例如，已知 $y=x^2-5x+6$ 的圖像，加上一直線，則爲以圖解法求 $x^2-4x+7=0$ 的解。如圖 2-22 所示。

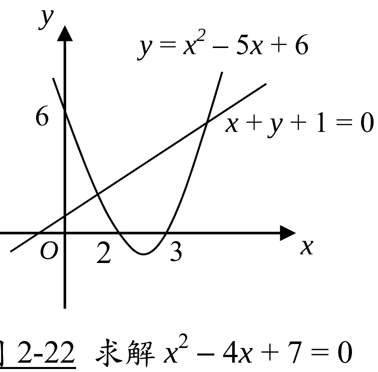


圖 2-22 求解 $x^2-4x+7=0$

在處理實際問題時，理解函數圖像並不容易。究竟甚麼才是理解了函數的圖像呢？是知道其中的一些特性，還是可以利用圖像解題，還是能夠得到圖像所表示的方程，或者能借由一

些特殊的函數推廣到一般函數？需要說明的是，圖解法其實是個目測。若要求結果更準確，就得把相關部分放大；若更有系統地處理，其實就變成了數值解，如二分法（method of bisection）等。這些數值解本身是完整的課題，於此不贅。

四、不等式

1. 不等式的相關概念

不等式作爲表達同類量之間的大小關係的一種數學形式，其必須在定義了大小關係的有序集合上進行研究。由於複數域沒有定義大小，所以不等式中的數或字母表示的都是實數。

簡單來講，不等式就是用符號“＞”或“＜”聯結兩個解析式所成的式子。其中，不等號“＞”或“＜”叫做嚴格不等號，“≥”或“≤”叫做非嚴格不等號（相應的不等式分別叫做嚴格不等式和非嚴格不等式）。例如 $a \geq b$ 表示“$a > b$ 或 $a = b$ 有一個成立”。另外，有時我們還會使用一種只肯定不等關係但不區分孰大孰小的不等號，即“≠”。對不等式的理解，要明白其含義，否則就會有下面的困惑：

【案例 2-6】　“2＞3，4＞5”這樣的式子是不等式嗎？

分析：這樣的式子也是不等式，只是它們是不成立的不等式。不成立的不等式也是不等式。

不等式的解和不等式的解集有何關係？兩者是一樣的嗎？不等式的解是使含未知數的不等式成立的未知數的值。一個含未知數的不等式可能有一個解、兩個解、無數個解，也可能無解。一個不等式所有解的集合稱爲這個不等式的解集。解集

只有一個。一個不等式無解，但它有解集，不過這個解集中沒有一個值，集合是空，也就是解集為空集。因此，不等式的解和不等式的解集是不一樣的。

2. 不等式的基本性質

無論是解不等式還是證明不等式，基本上都要用到不等式的性質。倒不是所有代數結構均能討論不等式，它必須是一帶序域（見上一章）。眾所周知，**R** 是一帶序域而 **C** 不是，一般我們不會說 **C** 內的不等式。例如，我們就不能說究竟 $1>i$ 還是 $1<i$，若集中於 **R** 用學生熟識的語言就有以下的性質：

對於任意實數 a、b 和 c，

（i） $a>b \Leftrightarrow b<a$（對逆性）；

（ii）$a>b,\ b>c \Rightarrow a>c$（傳遞性）；

（iii）$a>b \Leftrightarrow a+c>b+c$（可加性）；

（iv）$a>b,\ c>0 \Rightarrow ac>bc$（可乘性）；

（v）$a>b,\ c<0 \Rightarrow ac<bc$（可乘性）；

（vi）$a>b$，$a=b$，$a<b$ (三岐性)三者必有其一是對的。

其中的性質（iv），（v）是學生容易犯錯的地方。這裏我們給出其推導過程為：

由 $a>b$，得 $a-b>0$，當 $c>0$ 時，因兩個正數相乘為正數，所以 $c(a-b)>0$，得 $ac-bc>0$，從而得到 $ac>bc$；

當 $c<0$ 時，因 $a-b$ 是正數，c 是負數，而正數乘負數是負數，所以 $c(a-b)<0$，得 $ac-bc<0$，從而得到 $ac<bc$。

順便指出值得討論的一個問題：若 $a>b$ 及 $c<0$，問 $\frac{a}{c}$ 與 $\frac{b}{c}$ 怎樣比較大小？對此，我們不難推導出：因爲 $c<0$，所以 $\frac{1}{c}<0$，原因是 $c\times\frac{1}{c}=1>0$。所以 $\frac{a}{c}<\frac{b}{c}$。

3. 一元不等式的解與數軸

【案例 2-7】　不等式 $2x+1\geq 0$ 的解是甚麼？

分析：利用不等式的性質，不難得到 $x\geq -\frac{1}{2}$，但有相當一部分學生對"$x\geq -\frac{1}{2}$"所代表的是怎樣的數，感覺上還比較抽象。我們在數軸上作出直觀圖形進行表示，如圖 2-23 所示。這樣可以加强學生的直觀感覺，提高對不等式的解的認識。

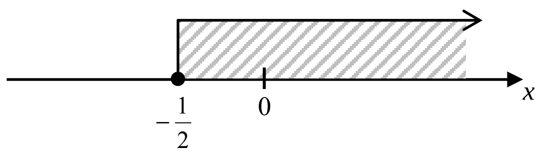


圖 2-23 在數軸上表示不等式的解

4. 不等式組

利用數軸表示一元不等式的解，我們就能更加直觀的讓學生理解到不等式組的解就是求每個不等式解的公共部分，下面舉例加以說明。

【案例 2-8】 解不等式組$\begin{cases} 2x+1 \geq 0, & (1) \\ 3x-5 \leq 0, & (2) \end{cases}$

分析：先解不等式（1）得 $x \geq -\dfrac{1}{2}$，在數軸上表示如圖 2-23 所示。再解不等式（2）得 $x \leq \dfrac{5}{3}$，在數軸上表示如圖 2-24 所示。

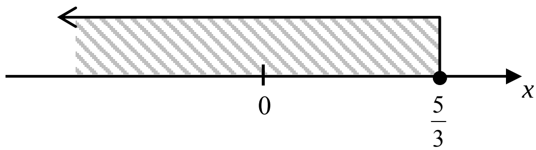


圖 2-24

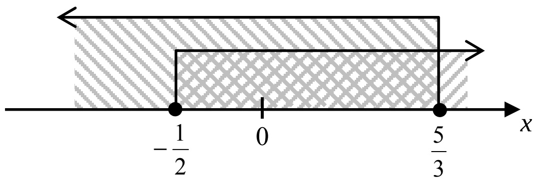


圖 2-25 不等式組的解的數軸表示

把圖 2-23 與圖 2-24 畫在一起，如圖 2-25 所示，可直觀地看出圖 2-25 的陰影重疊部分表示的是不等式組的解，也就是不等式（1）的解與不等式（2）的解的公共部分。

另外，任何一個一元一次不等式都可以經過恆等變形整理成

$$ax > b \qquad (*)$$

的形式。而不等式（*）的解，視 a 而定。若 $a>0$，解爲 $x > \dfrac{b}{a}$；

若 $a<0$，解爲 $x<\frac{b}{a}$；若 $a=0$，不等式 $ax>b$ 變成爲 $0\cdot x>b$，它不是一元一次不等式。此時如果 $b>0$，則 $0\cdot x>b$ 無解；如果 $b<0$，$0\cdot x>b$ 是絕對不等式，解爲全體實數。

5. 高階不等式

解高階不等式常用的處理方法是把高階不等式轉化爲低階不等式，下面以解一元二次不等式和一元三次不等式爲例加以說明。

【案例 2-9】　解不等式 $x^2-5x+6>0$。

分析：把不等式 $x^2-5x+6>0$ 左邊因式分解得 $(x-2)(x-3)>0$，根據實數的性質，即 $ab>0 \Leftrightarrow a>0$ 且 $b>0$，$a<0$ 且 $b<0$，從而得到兩個不等式組：

$$（\mathrm{I}）\begin{cases} x-2>0, & (1) \\ x-3>0, & (2) \end{cases} \quad 或 \quad （\mathrm{II}）\begin{cases} x-2<0, & (3) \\ x-3<0, & (4) \end{cases}$$

借助上面案例 2-8 的解法，　由（I）　得 $\begin{cases} x>2, \\ x>3, \end{cases}$　故 $x>3$；

由（II）得 $\begin{cases} x<2, \\ x<3, \end{cases}$　故 $x<2$。

則不等式 $x^2-5x+6>0$ 的解爲 $x<2$ 或 $x>3$。

高階不等式的解除了可以用“或”聯繫起來（聯立），也可以用“和” 聯繫起來。用集合語言來說，前者是解集的併集（$\cup$），後者是交集（$\cap$）。有了這個基礎就不難解高階一元不等式。一元二次不等式的解集，是分解爲兩個不等式組的

解集的併集。以不等式 $ax^2+bx+c>0$ $(a<0)$ 爲例，若將左邊因式分解，得 $a(x-p)(x-q)>0$，則有 $[(x-p)>0$ 和 $(x-q)>0]$ 或 $[(x-p)<0$ 和 $(x-q)<0]$，用以上“和”與“或”的技巧就可以了。

如用集合語言我們對【案例 2-9】的解集加以說明：

$$
\begin{aligned}
& (x-2)(x-3)>0 \\
\Leftrightarrow\quad & [(x-2>0)\cap(x-3>0)]\cup[(x-2<0)\cap(x-3<0)] \\
\Leftrightarrow\quad & (x>3)\cup(x<2)
\end{aligned}
$$

故解集爲 $\{x\in\mathbf{R}\,|\,x>3\}\cup\{x\in\mathbf{R}\,|\,x<2\}$。

這個方法不僅對於解一元二次不等式有用，而且對於解次數並不很高的整式不等式，也是一種較好的方法。另外，除了分組求解外，一元二次不等式還可以利用圖像解法，它可以幫助我們在幾何直觀上加深對一元二次不等式的解的意義的理解。

【案例 2-10】 利用圖像法解不等式 $x^2-5x+6>0$。

分析：由 $x^2-5x+6=0$，得 $x_1=2$ 和 $x_2=3$，畫出函數 $y=x^2-5x+6$ 的圖像大致形狀，如圖 2-26 所示。

所以不等式 $x^2-5x+6>0$ 的解爲 $x<2$ 或 $x>3$。

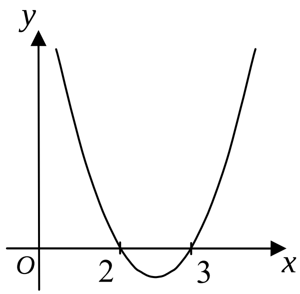


圖 2-26 不等式的圖像解法

利用函數圖像的方法，可以歸納出一元二次不等式的解的各種情況，爲了簡明起見，列表如下（亦可見圖 2-12）：

二次不等式	$ax^2+bx+c>0$ 的解		$ax^2+bx+c<0$ 的解	
a 的符號	$a>0$	$a<0$	$a>0$	$a<0$
$\Delta=b^2-4ac>0$（兩個實根 $x_2<x_1$）	$x>x_1$ 或 $x<x_2$	$x_2<x<x_1$	$x_2<x<x_1$	$x>x_1$ 或 $x<x_2$
$\Delta=b^2-4ac=0$	除 $x=-\dfrac{b}{2a}$ 外的所有實數	無解	無解	除 $x=-\dfrac{b}{2a}$ 外的所有實數
$\Delta=b^2-4ac<0$	所有實數	無解	無解	所有實數

二次不等式	$ax^2+bx+c\geq0$ 的解		$ax^2+bx+c\leq0$ 的解	
a 的符號	$a>0$	$a<0$	$a>0$	$a<0$
$\Delta=b^2-4ac>0$（兩個實根 $x_2<x_1$）	$x\geq x_1$ 或 $x\leq x_2$	$x_2\leq x\leq x_1$	$x_2\leq x\leq x_1$	$x\geq x_1$ 或 $x\leq x_2$
$\Delta=b^2-4ac=0$	所有實數	$x=-\dfrac{b}{2a}$	$x=-\dfrac{b}{2a}$	所有實數
$\Delta=b^2-4ac<0$	所有實數	無解	無解	所有實數

利用類似的方法，我們亦可解簡單的一元三次不等式。

【案例 2-11】 解不等式$(x-1)(x+1)(x+2)>0$。

分析：（分組法）原不等式可分成下面兩個不等式組：

（I） $\begin{cases}(x-1)(x+1)>0, & (1)\\ x+2>0, & (2)\end{cases}$

（II） $\begin{cases}(x-1)(x+1)<0, & (3)\\ x+2<0, & (4)\end{cases}$

解不等式 (1)，得 $x<-1$ 或 $x>1$；解不等式 (2)，得 $x>-2$；

故不等式組（I）的解爲 $-2<x<-1$ 或 $x>1$；

解不等式 (3)，得 $-1<x<1$；解不等式 (4)，得 $x<-2$；由於沒有這樣的$x\in\mathbf{R}$ 可以同時滿足 (3) 和 (4)，故不等式組（II）沒有實數解；

所以原不等式的解爲 $-2<x<-1$ 或 $x>1$。

對於這樣的高次不等式，我們也可以採用列表法來解。具體步驟是：

（i） 先求出不等號左邊三次式$(x-1)(x+1)(x+2)$的三個零點：$1,-1,-2$。

（ii） 以這三個根的值爲界，把全體實數（除去這三個數）按照由小到大的順序（在數軸上即是從左到右的順序）分成 4 個區間：$(-\infty,-2),(-2,-1),(-1,1),(1,+\infty)$，如圖 2-27 所示。

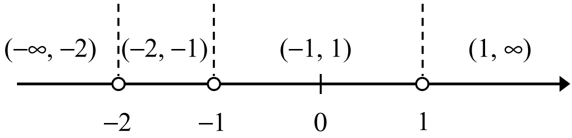


圖 2-27 不等式解的根軸表示

（iii） 分別考察當 x 在區間 $(-\infty,-2),(-2,-1),(-1,1),(1,+\infty)$ 內時，因式 $(x+2)$、$(x+1)$ 和 $(x-1)$ 的值的符號，由此求出在各個區間裏積 $(x-1)(x+1)(x+2)$ 的符號，填入下表中。

（iv） 從表中可以看出，積 $(x-1)(x+1)(x+2)$ 的值爲正數的區間是 $(-2,-1)$ 和 $(1,+\infty)$，這就是原不等式的解集。

	$(-\infty,-2)$	$(-2,-1)$	$(-1,1)$	$(1,+\infty)$
$x+2$	−	+	+	+
$x+1$	−	−	+	+
$x-1$	−	−	−	+
積	−	+	−	+

在普魯特（M. H. Protter）和莫里（C. B. Morrey）合著的《實分析初等教程》（*A First Course in Real Analysis*）裏，不等式的列表法簡化爲在數軸上直接表示的方法，就是把各個因式在每個區間的符號直接標在數軸上各個區間的上方。因爲積的符號由各個區間內負因子的個數決定，所以負因子的個數便可得到不等式的解：負因子個數爲偶數的區間是積大於零的不等式的解；負因子個數爲奇數的區間是積小於零的不等式的解。例如，上面表格可簡化爲數軸如圖 2-28 所示，得原不等式的解集爲 $(-2,-1)\cup(1,+\infty)$。

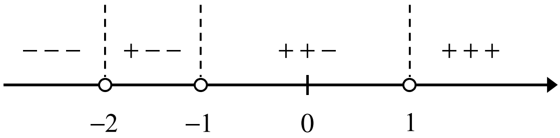


圖 2-28 不等式解的根軸表示

6. 二元一次不等式

一般來說，一元一次不等式的解集是無限的，二元一次不等式的解集更是無限了。

【案例 2-12】 二元一次不等式 $ax+by+c>0$ 的圖形是一個半平面。

分析：因爲 a、b 和 c 可以是正數或負數，所以二元一次不等式 $ax+by+c>0$ 的圖形會有很多的情況；但基本上只需要分成兩種情況去考慮：（1）$ab>0$；（2）$ab<0$。

只要懂得其中一種，另外一種也可類似得到。下面就以（1）作說明。

由於 a 和 b 同正同負，不妨設 $a>0$ 和 $b>0$。考慮直線 $l: ax+by+c=0$，則直線 l 的斜率是 $-\dfrac{a}{b}<0$。

設點 (x_0, y_0) 在直線 l 上，如圖 2-29 所示，取鉛垂線 L 通過點 (x_0, y_0)，注意所有 L 上的點均是 (x_0, y)。如果 (x_0, y) 在 $ax+by+c>0$ 的圖形內，則有 $ax_0+by+c>0$，得出 $by>-c-ax_0$，從而得 $y>\dfrac{1}{b}(-c-ax_0)$。

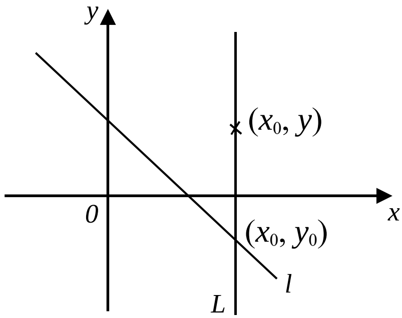


圖 2-29　不等式 $ax+by+c>0$ 的圖形

另一方面，因爲點 (x_0, y_0) 在直線 l 上，所以 $ax_0+by_0+c=0$，也即 $y_0=\frac{1}{b}(-c-ax_0)$。

所以，直線 L 上的點 (x_0, y) 在 $ax+by+c>0$ 的圖形上的充要條件是 $y>y_0$，即是 $ax+by+c>0$ 的圖形是 l 的上半平面（不包含直線 l）。

若考慮非嚴格不等式 $ax+by+c\geq 0$ 或 $ax+by+c\leq 0$ 時，則對應的半平面應包含邊界直線 l。

五、 數列

在學習微積分之前，面對的數學難題大多是離散量，數列往往是通往微積分學習的一個前奏，而且從數列可以突顯數學規律。例如，高斯（F. C. Gauss, 1777-1855）計算"81297 + 81495 + 81693 + … + 100899"便爲人所津津樂道。學生在初中階段就已經接觸了如三角形數、正方形數、立方形數等一大堆與數列有關的問題。宋朝數學家秦九韶（1208-1261）、楊輝（約

1238-1298）等都有不少這方面的研究。

1. 數列的函數特徵

【案例 2-13】 寫出數列的下一個數：1, 6, 23, 58, 117, _?_

分析：上述數列的規律不易發現，不過在解決這個問題之前，我們至少曾遇到這樣的數列：

1, 3, 5, 7, 9, _?_
1, 4, 9, 16, _?_

甚至

1, 1, 2, 2, 3, 4, 3, 4, 5, 4, 6, 7, 5, _?_, _?_

數列可以看成定義在正整數集或其有限子集上的函數，即 a_n 看成 f：$\mathbf{N} \to \mathbf{R}$。若 $f(n)$ 能夠寫成一個代數式，則 $a_n = f(n)$ 稱爲數列 $\{a_n\}$ 的通項。先用一個較簡單的問題解說："假設數列：1, 3, 7, 13, … 的通項是一個多項式，那麼第五項的值會是多少？"

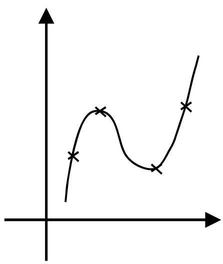
這類問題其實並無肯定答案。例如，1, 3, 7, 13 之後可以是 21，因爲 a_n 的通項可以考慮爲 $a_n = n^2 - n + 1$；但 13 之後也可以是 1，因爲這四個數也滿足通項 $a_n = -(5n^4 - 50n^3 + 169n^2 - 244n + 114)/6$。一般來說，我們總會先選取前者，因爲其式子比後者簡單。因此，這一類問題不僅是求出"下一個數"就足夠了，更是需要在所適有合的公式中挑選 n 的次數最低的一個。

基於這種更加明確的界定，我們就可用內插法（interpolation）去決定數列中的通項了。簡單地說，若已知某

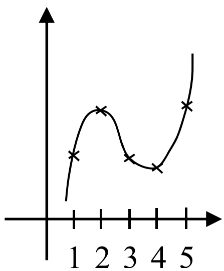
個數列的前 4 項 a_1，a_2，a_3，a_4 ，根據內插公式，即有

$$a_n = a_1\frac{(n-2)(n-3)(n-4)}{(1-2)(1-3)(1-4)} + a_2\frac{(n-1)(n-3)(n-4)}{(2-1)(2-3)(2-4)}$$
$$+a_3\frac{(n-1)(n-2)(n-4)}{(3-1)(3-2)(3-4)} + a_4\frac{(n-1)(n-2)(n-3)}{(4-1)(4-2)(4-3)}$$
$$=\frac{1}{6}[(-a_1+3a_2-3a_3+a_4)n^3+(9a_1-24a_2+21a_3-6a_4)n^2$$
$$+(-26a_1+57a_2+42a_3+11a_4)n+(24a_1-36a_2+24a_3-6a_4)]$$

內插法就是給出平面中 n 個點，必然找得一個不大於 $(n-1)$ 次的多項式穿過，如圖 2-30(a)所示。上面所用的就是這個加法，數列就只不過是其中特例，該 n 個點（以 $n = 4$ 而言）就是 $(1, a_1), (2, a_2), (3, a_3), (4, a_4)$ 罷了，如圖 2-30(b) 所示。



(a)



(b)

圖 2-30　內插法

2. 常見的數列

【案例 2-14】　問：這些數列 1, 1, 1, …；1, 0, 0, …；0, 0, 0, … 是等比數列嗎？

分析：1, 1, 1, … 當然是等比數列，當然它同時爲等差數列。至於其餘兩個，都是等比數列的特例，教師不必花太多精力去

處理。不過若真的要找尋原理的話，則需要看是否能接受對等比數列定義上的一些調整。比如，數列$\{a_n\}$若爲等比數列，只需要找到一與n無關的數r，使得$a_n = ra_{n-1}$，或者有$a_n = a_1 r^{n-1}$。在這個定義下，則案例 2-14 中的三個數列都是等比數列了。但如果我們對等比數列的定義是，從第二項起，後一項與前一項的比值爲常數，這個常數不能爲 0，那麼案例中後兩個數列就不是等比數列了。

除了等差數列和等比數列外，亦有其他不同的方法求數列的通項，例如“高階等差級數”和“招差法”。當中的例子及相關討論可見附錄 5，同時附錄 5 也介紹了遞推數列的相關計算，對案例 2-13 的回答也可以從中獲得。

第三章　圖形與空間

幾何在歷史上有其獨特的地位[1]。從古老的希臘文化和東方文化到現代的文明社會，教育的目的雖不同，但幾何在其中卻起着不可替代的作用。

西方第一次數學危機，數學家扭轉了畢達歌拉斯“萬物皆數”的想法，開始轉向幾何量，進行了所謂“數學幾何化”運動。《原本》（*Element*）這部劃時代的作品，奠定了西方數學的基礎，當今的幾何教育已經由推理擴展到對圖形與空間的認識。本章將先從圖形的認識、分類及性質出發，其中略涉及立體圖形；再轉到傳統的演繹幾何，兼介紹公理系統及設基化，傳統上幾何教學的主要功能在於推理，現時也有人提出邏輯推理應成爲實驗幾何通往演繹幾何的橋梁。因此，在此認識一些推理工具是恰當的。接着會介紹幾何變換。

由於本章涉及圖形與空間，我們以空間能力作總結，那麼整個圖形空間及傳統幾何的數學本質都能一一介紹。

第一節　圖形

一、對點、線、面和體的認識

我們知道，集合的基本元素是點、線、面及體，這個看上去層次分明的分類，卻會帶來這樣的困惑，我們可先看下面的例子：

---

[1] Revuz, A. (1971). The position of geometry in mathematical education. *Educational Studies in Mathematics, 4*, 48-52.

【案例 3-1】 學生問：在數學中，爲甚麼要規定點沒有大小？如果點沒有大小，那麼怎麼表示點呢？因爲用筆在紙上任意給出的點實際上都是有大小的。

類似地，還有“線沒有粗細，如何畫線？”“點沒有大小，爲甚麼點運動後得到的線卻是有長短的？”“線沒有粗細，爲甚麼線運動後得到的面卻是有面積的？”“面沒有厚薄，爲甚麼面運動後得到的體卻是有體積的？”

要回答上面的問題，首先我們看看在《原本》中，歐幾里得給出的基本定義：

(1)點是沒有部分的。

(2)線有長度沒有闊度。

(3)線的界限是點。

(4)面只有長度和闊度。

(5)面的界限是線。

其實《原本》在處理這些問題時十分小心，它從沒說過點累積後會形成線。因爲直線（所謂“連續統”continuum）是否有縫隙正是第三數學危機的核心問題。到 21 世紀初才基本上解決。在直觀上，空間相鄰兩區域的公共部分是面，一張紙可以給我們面的近似概念，事實上，面是在它兩側的兩個空間區域的界限，嚴格地說，一張紙並不是面，因爲這兩個區域被紙的厚度所佔有的空間區域所隔開，假設紙的厚度無限減小，那就得到了面的概念了。

《原本》回應第一次數學危機的種種問題，把數學設基化，點、線、面等均是被提煉到抽象層面的數學對象，但它們又是從人類勞動過程中接觸新的具體對象。雖然點、線、面在人們

（包括學生）心中都有清楚的直觀認識，但對於《原本》而言，整個基本想法是把點、線、面等看成是由基本法則（公設）所規範的數學對象。

二、圖形與空間

在數學教學中，所有的幾何圖形都是在紙上呈現並展開研究的，都是平面圖形。那麼，爲甚麼用平面圖形能表示出立體的感覺？這樣的表示方法有哪些？相應的規則又是怎麼形成的？

所謂立體圖形，即用平面圖形表示出立體的感覺。事實上，斜二測畫法是三維空間到二維空間的投影，但由於圓本身是二維圖形，所以這個圖形的變換還是二維到二維的。我們也就不必再去考慮相對複雜的立體問題，只把它看做是平面圖形的變換。

用較爲高等的數學語言說：斜二測畫法保持線段長度的比例不變，從而也就保持平行關係，所以它是一個仿射變換。由於二次曲線在仿射變換下不改變類型，所以圓（可看成特殊的橢圓）仍被變成橢圓。這就是空間幾何體直觀圖的一種畫法。

以正投影法爲基礎的畫法幾何與以仿射變換、射影變換爲基礎而形成的仿射幾何學、射影幾何之間的關係是十分密切的。運用仿射幾何的理論可以用來闡明與解決畫法幾何中的一些問題，特別對畫法幾何中難於解決的問題，提供了方便和可能，從而形成了一種新的體系。

三、幾何圖形的本質特徵

1. 長與闊

【案例 3-2】 正方形旋轉了 90° 後是正方形還是菱形？怎樣確定長方形（矩形）的哪邊是長，哪邊是闊？如圖 3-1 所示，梯形中哪個是上底？哪個是下底？如圖 3-2 所示。

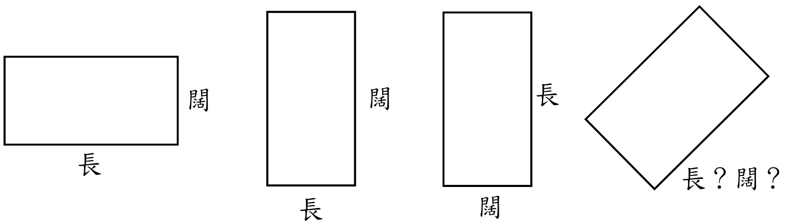


圖 3-1 哪邊是長？哪邊是闊？

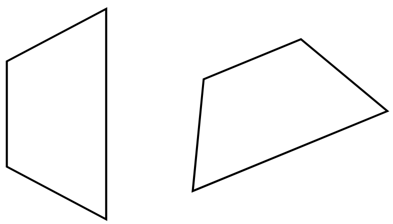


圖 3-2 哪條邊是上底？
哪條邊是下底？

分析：長方形的直觀形象是四個角都是直角(這是本質特徵)，另外還有對邊相等，鄰邊可能相等，可能不等。爲了學習的方便，在小學階段，把正方形從長方形類別中分離出來，單獨研究，於是就出現了長方形的鄰邊不等，需要給予一個名稱，以便交流。由於習慣上，人們通常感覺長比闊的數值大，因此，通常把較長的邊叫做長，較短的邊叫做闊。當然也可以有其它的規定，但一旦規定明確了，就應該遵守，以便於表達和交流。

和先前與第一章討論過三隻雞有多少腳的情況相類似。究

竟是寫成 3×2 還是 2×3，其實是有彈性的。例如，圖 3-3 中將 6 進行因子分解時，面積爲 6 的長方形可以是長爲 6，闊爲 1，也可以是長爲 3，闊爲 2；長爲 2，闊爲 3；長爲 1，闊爲 6。到後段“長”的長度比“闊”的長度短了。不過，這會讓不少學生不習慣。

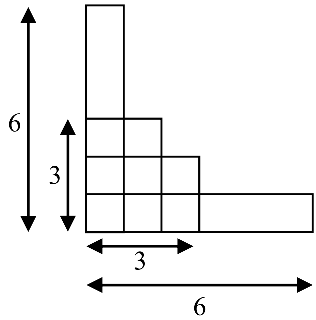


圖 3-3　6 的因子分解

梯形的問題也是這樣。梯形的直觀形象是一組對邊平行且不相等（這是它的本質特徵），平行且不相等的這組對邊就是梯形的底。至於哪個是上底，哪個是下底，這不是問題的關鍵所在。在小學階段，爲了學生學習與交流的方便，只需要制定一個規則（比如，較長的邊叫做下底，較短的邊叫做上底），然後均遵照這個規則來表達與交流即可。等到了初中甚至高中、大學階段，這些問題也就不再成爲學生的疑惑了。

2. 多邊形分類與性質

多邊形是由相連而不交叉的線段所圍成的封閉圖形，除了以邊的數量分類外，當然亦有凸及凹多邊形之分，如圖 3-4 所示。

一些凸多邊形性質如內角和也會在凹多邊形適用。一般在中小學數學教學中，我們不考慮形如圖 3-5 的多邊形。

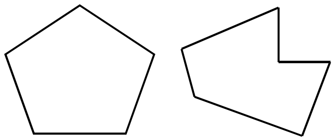


圖 3-4 凸與凹多邊形

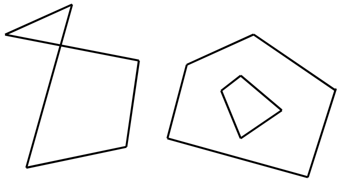


圖 3-5 學校範圍不考慮的圖形

最簡單和最先接觸的自然是三角形。一般會按角（直角三角形、銳角三角形和鈍角三角形）或邊（等邊三角形、等腰三角形和不規則三角形）去分類。值得注意的是，對於直角三角形、銳角三角形和鈍角三角形，不可以理解成“有一個直角”、“有三個銳角”和“有一個鈍角”的三角形，而應該看成是有最多個可能的直角、銳角和鈍角的三角形。這更可看到當中優美之處。

至於其中的性質及其證明這裏不詳細說明，現簡述如下：

等腰三角形　定義：（至少）兩邊長度相等。

性質：1. 兩腰相等；

2. 頂角向底引出的垂線將底邊等分；

3. 頂角的平分線與底邊垂直。

等邊三角形　定義：三邊相等。

性質：1. 具有等腰三角形的所有性質；

2. 每角均爲 60°。

四邊形亦有類似分類及性質。

梯形　定義：（起碼）對邊平行。

性質：平行邊形成的內角互補。

平行四邊形	定義：	兩對邊平行。
	性質：	1. 具有梯形所有性質；
		2. 對角線能互相平分。
菱形	定義：	鄰邊等長的平行四邊形。
	性質：	1. 具有平行四邊形的所有性質；
		2. 所有邊長相等；
		3. 對角線互相垂直。
長方形	定義：	其中一內角爲直角的平行四邊形。
	性質：	1. 具有平行四邊形的所有性質；
		2. 所有角皆爲直角。
正方形	定義：	同時爲長方形，亦爲菱形。
	性質：	具有平行四邊形和菱形的所有性質。

小學生在懂得推理前是按照直觀來認識圖形的，再進一步是通過圖形分類去建立概念，例如，圖 3-6 所展示的對四邊形的分類：

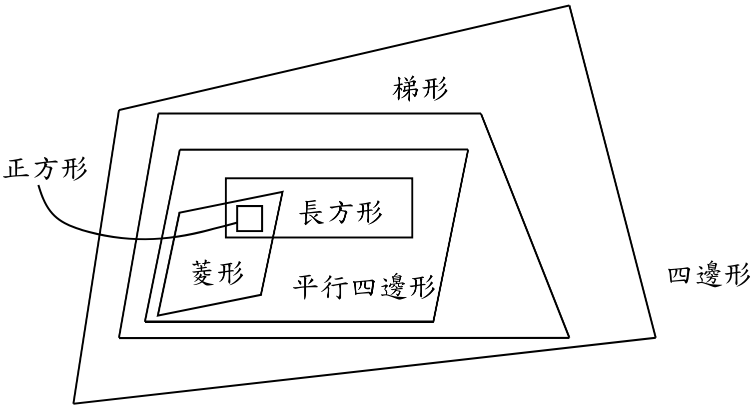


圖 3-6 四邊形的分類

歸類往往是建立概念的手段，亦是直觀認識嚴格定義的橋梁。類似的溫氏圖（Venn），對學會推理的學生有好處，可以方便地知道不同圖形的包含性質（圖 3-6）。例如，由於平行四邊形集為梯形的子集，所以平行四邊形具有梯形的所有性質。

3. 多邊形內角和

根據《原本》，三角形的內角和為 180°是一個定理。它是由直線上鄰角和的定理與平行線的特性所推導出來，如圖 3-7 所示。

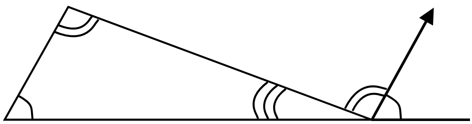


圖 3-7 三角形的內角和

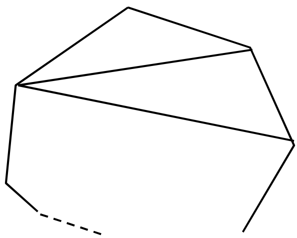


圖 3-8 多邊形分解為多個三角形

至於由三角形的內角和推廣至凸 n 邊形的內角和，其中有以簡馭繁的數學歸納法思維以及將複雜圖形分割成三角形的想法。因此，從某個意義上來說（甚至極端一點），對於幾何圖形我們只需研究三角形就可以了，或者研究三角學就可以了

，因爲可將其它多邊形分解爲多個三角形來看待，如圖 3-8 所示。

多邊形的外角和其實也有不少想法可以介紹給學生的。例如，爲甚麼內角和會隨着邊數增加而增加，而外角和則保持爲 360°？一個“原因”是，雖然外角的數量多了，但每一個外角卻窄了，更確切地，若在多邊形內（在形外也可以）任何一點出發，隨着各角度一個一個地移動，甚至想像眼睛向着特定的方向觀望，最終會完成一周角，如圖 3-9 所示。

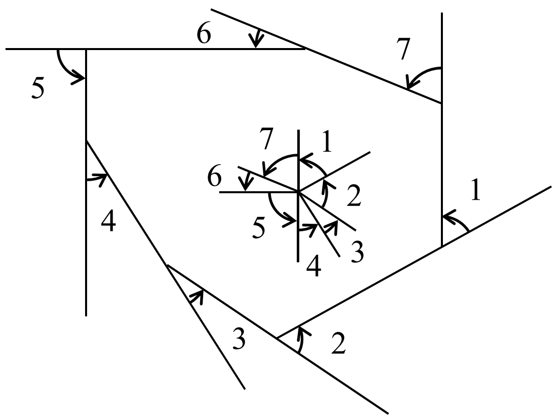


圖 3-9　爲什麼內角和會隨着邊數增加而增加，
而外角和則保持爲 360°？

4. 圓形

從 n 邊形引申到極限情況就是圓形，它可以說是複雜（$n \to \infty$），但也可以說是最常見，亦是最完美的平面圖形。

【案例 3-3】 圓形是只算周界（$x^2+y^2=1$）還是包含內部（$x^2+y^2\leq 1$）？

《墨經》說，“圓，一中同長也”。無可否認，一般來說，圓（及多邊形）是指圓周（周界），而不是指連同圓內區域的圓盤。但如同第一章遇到的不少問題一樣，很多事情是有彈性的。例如，我們通常會說“圓面積”而不會說“圓所圍成的面積”或“圓盤面積”。

圓形亦有不少性質，下面我們對它們簡要敘述：

（1） 垂直於弦的直徑垂足平分該弦。

（2） 等弦對等弦心距。

關於角的性質是用得比較多的。在看這些性質之前，首先要清楚“弓形”的概念，一條弦可看成將圓割成兩個部分，每部分稱爲一個弓形。此外，我們也有“同弧 $\leftrightarrow$ 同角 $\leftrightarrow$ 同弦”的性質。因爲同一個弓形內的圓周角都等於圓心角的一半，所以在同一個弓形，圓周角相等。半圓形內的圓周角成直角只爲上面的特例。

（3） 等弦對等圓心角，等圓心角對等弧。

（4） 同弧上的圓周角相等。

（5） 圓周角 $=\dfrac{1}{2}$圓心角。

（6） 半圓上的圓周角是直角。

涉及弧長的性質不多，除了上面所說之外，就是弧長與圓心角成正比（這可聯想到鐘面上，時針針端所行距離與所劃過的角成正比），而由於圓心角是圓周角的 2 倍，弧長與圓周角亦成正比。但要注意，弦長沒有這個性質，這可與三角學所學

“模擬一下”：因爲弧長 = $r\theta$（r 是圓的半徑，θ 以弧度角爲單位），故弧長與θ成正比（這裏只說模擬，不是說用三角學知識“證明”上面性質），但弦長卻與$\sin\theta$有關，因而弦長與θ不是線性關係，故不會成正比。因此，

（7）　等弧對等圓心角。

接下來便是一些有關共圓四邊形（一般的，我們也說“四點共圓”）的性質，這其實是“同弓形圓周角相等”性質的延伸。共圓四邊形就是由不同弓形的兩個圓周角所形成。同一弓形時相等、不同弓形時互補，如圖 3-10 所示。至於涉及外角的只是這個性質稍稍變化罷了。當然還有這些定理的“逆定理”，若一個四邊形的對角互補，則此四邊形爲一共圓四邊形。因此有如下性質：

（8）　圓內接四邊形對角互補。

（9）　圓內接四邊形外角等於內對角。

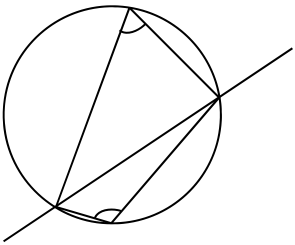


圖 3-10 共圓四邊形

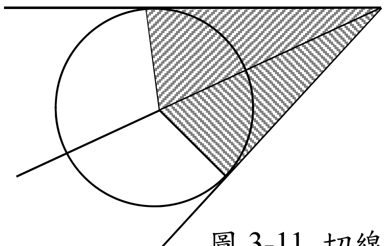


圖 3-11 切線

最後就是關於切線的三個主要性質，第一個涉及圓上切線：切線交點爲圓心的垂足，此外就是圓外的兩條切線，亦即形成了兩個對稱而又全等的直角三角形，如圖 3-11 所示。最後就是與弓形有關的角。我們可以用上述“弦將圓割成兩個弓形”

的想法協助瞭解：如圖 3-12 所示。"右邊"弓形與切線形成的角與頂點在"左邊"弓形上，即在該弦兩端的任一圓周角相等。因此：

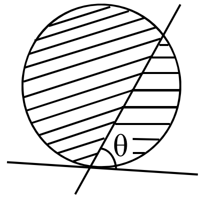


圖 3-12 弓形與切線

（10） 圓心的垂足爲圓上切線與圓的交點，反過來說，經過半徑的外端而且垂直於該半徑的直線是圓的切線。

（11） 圓外一點引該圓的兩條切線與半徑，及圓心與該點連線所形成的兩個三角形全等（切線長定理）。

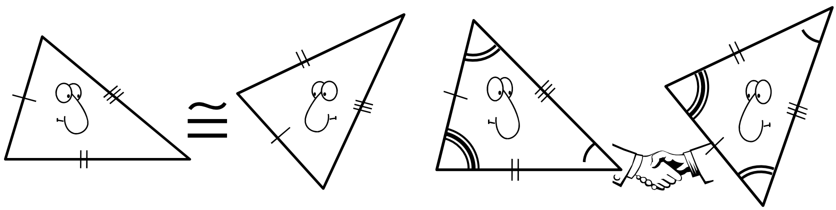
（12） 切線與弦的夾角等於在相對弓形內的圓周角。

5. 圖形的本質

任何知識的學習都需要經歷由簡單到複雜、由淺入深、由感知表象到把握本質的過程。研究圖形、圖形之間的全等條件也是這樣。下面我們以三角形全等爲例。仔細想一想，有關兩個三角形全等條件的研究問題其實也是關於單一三角形的問題。

兩個三角形如果全等，那麼相應的三對角、三對邊相等；反過來，如果兩個三角形相應的三對角、三對邊相等，那麼這兩個三角形當然重合，也即全等。但是這個全等條件太苛刻，能不能把全等條件減少到最低限度？於是探索活動就展開了。通過探索，全等條件可以減少爲三個，常見的有：邊邊邊（SSS），邊角邊（SAS），角角邊（AAS），角邊角（ASA），特殊三角形的全等條件可以再減少，另當別論。

如果兩個或多個三角形全等，比如，通過 SSS 法判定它們全等，那麼我們就可以把這兩個或多個三角形看成一個三角形，即當三邊的長度都確定時，這個三角形放置在任何地方都不會改變形狀，即這個三角形是唯一的，如圖 3-13 所示。根據這個特點，我們在高中階段就可以借助正弦定理、餘弦定理，由已知的三邊（或 SAS、AAS、ASA），來求出剩餘邊的長度或角的度數。



表面上是兩個全等三角形

在數學本質上
可以看成同一個三角形

圖 3-13　只有"一個"三角形

在這個學習的過程中，學生又可以進一步認識到三角形的穩固性。比如，由於 SSS 決定了三角形，所有角都定了。四邊形就不同，哪怕有了"SSSS"，角仍可以變。換言之，三角形的三邊相等一定是等邊三角形（正三角形），而四邊相等的四邊形不一定是正方形（正四邊形）。故此，三角形是"穩定"的支架結構而其它多邊形均不是。

6. 全等與相似

幾何上有幾個重要的觀念，形狀、大小、位置等。在傳統幾何中，如果不考慮圖形的位置，當圖形的形狀相同、大小不

確定時，就說圖形是相似的；如果圖形的形狀與大小都相同，就說圖形是全等的。

不過要注意的是《原本》中沒有正式定義“全等”，例如命題 8 中，它只說“如果兩個三角形的一個有兩邊分到等於另一個的兩邊，並且一個的底等於另一個的底，則夾在等邊中間的角也相等。這其實是大家熟悉的 SSS。但《原本》並沒有用“全等”這個詞。他們可能亦意識到相似可以涉及整體空間的情況，如圖 3-14 所示。所以採取了這種巧妙的不加定義的方法，以回避可能出現的邏輯問題。”

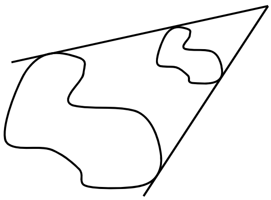


圖 3-14　空間上的相似圖形

圖形的全等是圖形間的一種等價關係。給定平面上或空間中的兩個幾何圖形，如果經過合同變換（即正交變換），一個圖形能與另一個圖形重合，即一個圖形能變成另一個圖形，則把這兩個圖形稱爲全等（圖）形或合同（圖）形。例如，平面上有線段、角、三角形、圓等的全等，空間中多面角、多面體、球等的全等。兩個圖形 F_1 和 F_2 等，記爲 $F_1 \cong F_2$ 或 $F_1 \equiv F_2$，圖形的全等是等價關係，即具有：

（1）反身性：　對於任何圖形 F，有 $F \cong F$。

（2）對稱性：　對於圖形 F_1 和 F_2，若 $F_1 \cong F_2$，則 $F_2 \cong F_1$。

（3）傳遞性：　對於圖形 F_1、F_2 和 F_3，若 $F_1 \cong F_2$ 及 $F_2 \cong F_3$，則 $F_1 \cong F_3$。

兩個全等形重合時其重合的幾何元素稱爲對應元素，如對應點、對應邊、對應角等。

圖形的相似和圖形的全等一樣，也是一種等價關係。相似形也有類似的定義和性質。特別的，如果兩個圖形 F_1 與 F_2 相似，那麼它們的對應線段之比等於相似比；它們的對應角相等；它們的對應面積之比等於相似比的平方；它們的對應體積之比等於相似比的立方。相似形是在相似變換下互相變換的圖形。具體到三角形中，全等三角形和相似三角形有各自不同的定義：

（1）　全等三角形：三角形的全等是三角形間的一種等價關係，經過合同變換後能夠完全重合的兩個三角形叫做全等三角形。換句話說，兩個三角形的形狀、大小都一樣時，如果其中一個可以經過平移、旋轉、對稱等運動（或稱變換）使之與另一個重合，那麼，這兩個三角形稱爲全等三角形。

（2）　相似三角形：對應角都相等，對應邊都成比例的兩個三角形叫做相似三角形。很明顯，當兩個相似三角形的相似比等於 1 時，這兩個三角形就是全等三角形。可見，全等三角形是相似三角形的一種特殊情形。

在使用符號表示圖形時，由於對幾何圖形符號表示的不同認識，反映出的實際上是研究者不同的思維方式與研究方法。同時，也不免出現這樣的疑惑：

【案例 3-4】　$\triangle ABC$ 能不能與$\triangle BCA$ 全等（或相似）？如何表示其全等（相似）關係？

分析：用符號表示圖形時，通常選取圖形的關鍵點，用英文字母表示出這些關鍵點，然後規定出用這些關鍵點字母表示圖形

的規則。例如，四邊形 $ABCD$，五棱柱 $ABCDE - A_1B_1C_1D_1E_1$ 等，字母顯示的點是順次連結而成的，字母與字母間有對應的位置關係（如四邊形 $ABCD$ 中 AC、BD 是對角線，五棱柱 $ABCDE - A_1B_1C_1D_1E_1$ 中 AB 與 A_1B_1 是對應邊等）。這樣，依據公認的規範進行表達，就不會造成交流的歧義。

在研究兩個三角形之間的全等問題時，爲了方便學生學習，我們通常規定$\triangle ABC \cong \triangle DEF$ 的符號表示暗含着 A 與 D、B 與 E、C 與 F 分別是對應點。基於此，學生不需要分類討論其它的對應情況，這樣也簡化了問題的研究。例如，已知$\triangle ABC \cong \triangle DEF$，則對應邊和對應角相等。即 $AB = DE$，$AC = DF$，$BC = EF$。$\angle A = \angle EDF$，$\angle B = \angle E$，$\angle ACB = \angle DFE$。

具體到一個$\triangle ABC$，由於三角形的特殊性，三個頂點的字母可以任意調換，$\triangle BAC$ 與$\triangle CBA$ 等都表示的是同一個三角形，而三角形當然與自身全等，因此就有：$\triangle ABC$、$\triangle BAC$ 與$\triangle CBA$ 都是全等的結論。假設使用全等符號“ $\cong$ ”來表示同一個三角形的全等關係“$\triangle ABC \cong \triangle BAC \cong \triangle CBA$ ”，就會造成 A、B、C 三點均是相互對應點的混亂，反而干擾學生的學習。因此，通常在這種特殊情形下我們用文字來表述全等關係，而不用全等符號“ $\cong$ ”來表述了。

不過，如上所述，在 $\overline{AB} = \overline{XY}$，$\overline{BC} = \overline{YZ}$，$\overline{CA} = \overline{ZX}$ 的情況下，雖然書寫$\triangle ABC \cong \triangle XYZ$ 是隨時鼓勵的良好習慣，說$\triangle ABC$ 與$\triangle XZY$ 全等在數學上不能馬上說他錯，因爲$\triangle XYZ$、$\triangle XZY$ 可看作是同一個三角形，尤其是當學生仍把三角形看成是一個整體的實物。

除了命名的問題外，我們還可討論將一個圖形反過來，如圖 3-15 所示是否算是全等。19 世紀克萊因（F. Klein,1849-1925）

主導的愛爾朗根綱領（Erlangen Program）便以“不變量”（invariant）把不同的幾何學分類。在歐氏幾何中，長度、角度是決定性的，位置則不是。換言之，將兩長度、角度均相等之圖形平移後，前後兩個圖形算是一個（相等）。反轉過來，一般情況下不算新圖形，即是$\triangle ABC \cong \triangle ACB$。其實如第二章提到，數學上所謂相等，往往只是在某種意義（定義）下相等而已。不過最好是把變換了的三角形命名為A', B', C'，那就避免混淆了。

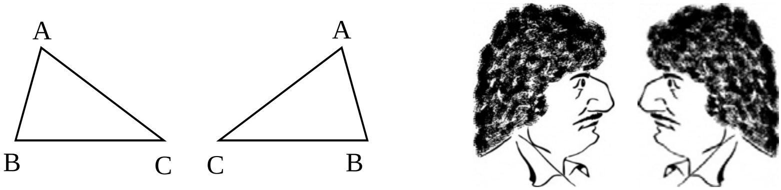


圖 3-15 左面的兩三角相等嗎？
右面的兩個圖又算相等嗎？

當然，在不同的研究階段，處理不同的研究對象時，圖形的符號表示可能並非關鍵因素，也不是表達與交流的關鍵橋梁。例如，在歐氏幾何中，圖形中線的長度不變是本質問題；而在拓撲研究背景下，圖形中線的長度是否改變不再是本質因素。因此，我們需要知道，圖形表示中字母符號的表達規則與對應含義發生改變時，理解也需要隨之調整。

7. 多面體

在立體圖形中，除了旋轉體外，多面體中存在一種非常特殊的情形，如所有面都是正三角形的三棱錐、所有面都是正方形的正方體等，這些多面體給人以對稱、精巧的感覺，那麼如

何從數學的角度給這類圖形下定義呢？

首先，假如對於立體圖形的每個頂點，數一數聯繫着每個頂點多邊形的數量，就得出一個頂點序列。例如，對四面體而言，任一頂點均連接着 3 個三角形。故其頂點序列爲（3，3，3）。因此，假若一個多面體滿足以下三個條件：

（1） 所有面均是正多邊形；
（2） 所有頂點的頂點序列均相同；
（3） 對於任一頂點序列，序列中的各整數均相同，則叫它做正多面體（regular polyhedron）或柏拉圖立體（the Platonic solids）。

歐拉（L. Euler, 1707-1783） 借助歐拉公式“$V-E+F=2$”證明只有五種正多面體。這裏我們介紹一下證明過程：

設正多面體每一面有 h 邊，且每一頂點聯繫着 k 邊，又因爲每條邊均屬兩個不同的平面，所以 $\dfrac{hF}{2}=E$ ；另一方面，每條邊連着兩個頂點，所以 $\dfrac{kV}{2}=E$ ，故此 $hF=2E=kV$ ，等價變形得：

$$\frac{F}{\frac{1}{h}}=\frac{E}{\frac{1}{2}}=\frac{V}{\frac{1}{k}}=\frac{V-E+F}{\frac{1}{h}-\frac{1}{2}+\frac{1}{k}}=\frac{4hk}{2h+2k-hk}>0 ,$$

$\therefore 2h+2k-hk>0$，　　　　$\therefore 4>(h-2)(k-2)$。

由於 h 和 k 爲正整數，其可能性只有：

$$\{3,3\},\{3,4\},\{3,5\},\{4,3\},\{5,3\}。$$

對應的只有：正四面體，正六面體（正方體），正八面體，正

十二面體，正二十面體。

若多面體只滿足（1）及（2），則稱之爲半正多面體（semi-regular polyhedron）或阿基米德多面體（the Archimedean solids）。亦即多面體的頂點由連接着“數個全等的正多邊形”改成“數種同邊長的正多邊形”。除了正多面體、柱體（有無限種）、斜多面體（anti-prism）外，可證明這樣的半正多面體只有 13 個。

正多面體與半正多面體均可以通過折紙得到，不少書中均可找到它們的折紙的紙樣。不過這些折紙與流行的折紙術（origami）不同。前者，以一張相連的平面折成，後者可以用不同的小塊拼成。一般的多面體也可以沿着邊剪開，將其側面平展在平面上，稱之爲多面體的展開圖。另外，也可以通過對五種正多面體進行截角、變形得到十三種半正多面體。

8. 幾何作圖

現時一般人以爲幾何作圖只局限於尺規，其實這只是古希臘人（歐幾里得）的美麗執着，故又稱爲歐氏作圖。幾何作圖工具遠多於此，例如有名的伏羲女媧圖，如圖 3-16 所示，便有圓規（規）及角尺（地）。

圖 3-16　伏羲女媧圖

所謂尺規作圖，是利用“易散圓規”（collapsible compass）複製長度及一無刻度的“直邊”（straight edge）作圖。當中精妙之處是盡可能使用了幾何性質。其中沒有刻度（包括長度

和角度）隱含着歐氏幾何“去度量”的精神；大部分幾何性質把圖形放大或縮小後依舊成立。就教學而言，除了尺規作圖，其實還有不少其他空間，如只用圓規、三角板、長條直尺（界尺：即一對平行線）等。

第二節　演繹幾何

一、公理與定理

現在的中學數學教科書在幾何定理的編排上，基本上仍是根據歐幾里得《原本》的順序來編排的，例如，先有直線問題，然後是多邊形和圓。這和《原本》的編排順序類似。然而，《原本》卻不是一本好的教科書，因爲它成書的原意並不是作爲一本教科書的。在第一次數學危機過後，《原本》的任務就是將數學建基於邏輯公理系統之上，並以比例理論填補了第一次數學危機的相關漏洞，試圖建立一個邏輯上無懈可擊的體系。這個體系在某些地方，對學習者而言，可能是不自然的，事實上也不一定必須按照它的次序去學。但是爲何我們推理的次序要根據《原本》的次序呢？其實除了歐氏幾何外，還有不同的幾何系統，包括“橢圓幾何”和“雙曲幾何”兩類非歐幾何，此外，上述克萊因的愛爾朗根綱領便分析出不同幾何系統，包括有“橡皮幾何”之稱的拓撲學。

歐幾里得《原本》的功績，除了處理當時第一次數學危機的問題，就是精妙的第一次把數學公理化（設基化），先由一些人皆接受的“真理”（公設與公理）出發，加上一些大家都會接受的定義，逐步推導出各條定理（命題）。由於出發點是

正確的，邏輯推導是正確的，所推導出來的都會是正確的“真理”。據王浩[2] 的分析，這種偉大的構想被各學科爭相仿效，如牛頓(I. Newton, 1643-1727)的力學、拉格朗日(L. Langrange, 1736-1813）的分析力學、克勞修斯（R. Clausius, 1823-1888）的熱動力學、史賽洛沙（B. Spinoza, 1632-1677）的倫理學及現代經濟學等。

隨着第三次數學危機，人們放棄了“公理”的想法，而轉以“公設”及“原始名詞”（primitive term）作起點推導出各種命題。這些“公設”沒有真與不真，只是某個推理系統的出發點。因此所推出的命題是相對於這些前設爲真罷了。下面我們從公理系統來分析這樣做的價值。

二、《原本》的公理系統

《原本》基於 5 條公設和 5 條公理，以及相關的定義，展開了十三卷的內容，其中蘊含 465 個命題。這就是一個公理體系。那麼幾何爲甚麼要建立這樣的公理系統呢？（《原本》各卷的簡介可參考附錄 6）

中國古代數學家在幾何學上有輝煌的貢獻，但是他們完全沒有想到應當建立一個公理系統，他們關心的是找尋有效的解題方法——計算幾何量的方法。在歐幾里得之前，古希臘學者們在幾何領域已取得了十分豐富的成果，他們構建幾何的公理體系，這要歸因於他們的社會和政治，古希臘人在幾何論辯中逐漸學會了追根問底的邏輯推理方法，這在中國古代社會沒有產生，因爲古代中國更注重現實的應用，這種尋根問底的方法並不需要。爲了解決尋根問底和沒完沒了地追問的矛盾，古希

[2] Wang, H. (1962). *A survey of mathematical logic*. Beijing: Science Press.

職人規定：大家共同商定、共同承認若干條最基本的根據叫做公理（或公設），對於公理（公設）是不需要再追問的。

《原本》就是根據這樣幾個公理和公設，推導出其他的很多定理，由此建立了完整的理論體系。在這個體系中，遵守嚴密的邏輯推理，每一個命題都是以公設、公理或它前面的命題作爲證明的依據，並按邏輯相關性排列而成。

然而，這個公理體系並不是很完善，在邏輯上也不够嚴謹。問題主要包括：定義不清晰（例如，一個面的邊是線，線是無闊度的長度）；公理不完備或不獨立，甚至是不必要的（例如，凡直角都相等）。事實上，這個公理體系還有很多基於直觀推理的證明構成，要借助圖形或者人們的現實感知才能實現，這也是造成不嚴謹的一個重要方面。因此，這裏的公理體系還只是處於發展階段，並不完善。

例如 1892 年 W. W. Rouse Ball[3] 提出著名的錯誤“證明”：任何三角形均等腰。

對任意三角形$\triangle ABC$，考慮 AB 的垂直平分線（與 AB 相交於點 P）及$\angle C$ 的角平分線。

<u>情況一</u>：若兩者平行，則可推出角平分線垂直 AB。設角平分線與 AB 相交於 D，則易知$\triangle CAD \cong \triangle BAD$ （ASA 全等條件），從而推出 $AC = BC$，故 $\triangle ABC$ 爲等腰三角形。

<u>情況二</u>：若兩者不平行，則設兩者相交於 M，如圖 3-17 所示，可分三種情況討論：(i) M 在$\triangle ABC$ 的內部；(ii) M 在$\triangle ABC$ 的外部；(iii) M 落在 AB 邊上。

[3] Rouse Ball, W. W.，& Coxeter, H. S. M. (1892/1987). *Mathematical recreations and essays* (13th edition). New York : Dover Publications.

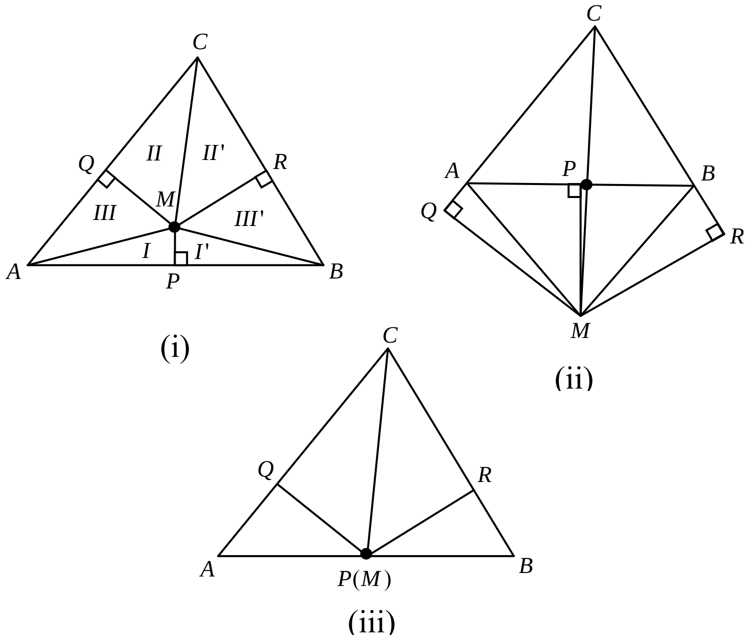


圖 3-17 “證明”任何三角形均等腰

對於情況(i)，可考慮如圖3-17所示的6個三角形 I 、 I′ 、 II 、II′、III 及 III′。由已知條件推出 $\mathrm{I} \cong \mathrm{I}'$, $\mathrm{II} \cong \mathrm{II}'$，$\mathrm{III} \cong \mathrm{III}'$，從而證明 $AC = BC$。對於情況 (ii) 及 (iii)，也可推出 $AC = BC$ 的結果，在此不贅。

事實上，這類錯誤的“證明”除了可讓學生反思證明的過程外，也可讓學生體會幾何作圖對證明過程所起的指導作用。還要指出，這錯誤“證明”的錯誤在於圖 3-17 的作圖並未能顯示正確的幾何關係，圖 3-18 所顯示的才是真相。反思以上錯誤的“證明”，便會發現，證明出現的漏洞在於考慮情況圖 3-17 (ii) 時欠周詳，圖 3-17 (ii) 只給出其中的一個可能的子情

況，而另一可能的子情況就正如圖 3-18 所示的，此時，則推不出 $AC = BC$，故此論證並不成立！

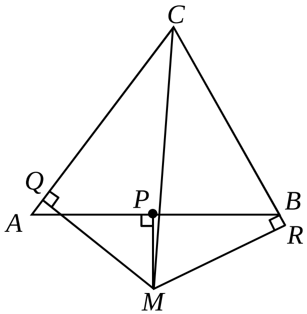


圖 3-18 錯誤證明的正確圖形

三、希爾伯特公理系統

為了完善公理體系，德國數學家希爾伯特（David Hilbert, 1862-1943）在 19 世紀末 20 世紀初提出了建立公理體系必須遵循的三條邏輯上的標準：

兼容性：在同一公理體系中，不僅不能相互矛盾，也不能由它們推出相互矛盾的命題。

獨立性：系統中每一條公理都是必要的，它不能由系統中其他公理推出。

完備性：這些公理對於所研究的領域已經足夠了，不能再添加新的獨立公理，加上去，就有矛盾。

幾何公理都是從現實世界的空間性質抽象出來的，幾何學應當完全反映現實世界的空間性質。通過這三條標準，人們希望《原本》能夠更加完善。在 1899 年，希爾伯特出版了《幾何基礎》（*The Foundation of Geometry*），給出了點、線、面、

關聯、順序、合同這些原始概念的準確定義，爲歐幾里得幾何補充了完整的公理體系。希爾伯特公理系統可參考附錄 7。

第三節　教學用的公理系統

一、公理體系的價值

雖然《原本》的編寫目的不是要寫一本教材，但是傳統幾何教學還是大多依據它的次序來安排，不過，我們需要知道，這並不是必然的。至於爲甚麼幾何教材要依據《原本》來安排呢？對此，徐光啓曾言：欲脫之不可得，欲駁之不可得，欲減之不可得，欲前後更置之不可得。下面我們以相似三角形和平行線分線段成比例定理爲例，分析其中的原因。

【案例 3-5】　爲甚麼是先有平行線分線段成比例定理再有相似三角形？

一般來說，教科書先通過實際例子，如縮小或放大圖形、模型或地圖比例、測量等，引入相似形的概念，然後把討論集中於相似三角形的情況，一來因爲三角形是最簡單的圖形，二來任意多邊形都能分割爲若干個三角形（至少對凸多邊形是輕易辦到的）。大部分教科書隨即會介紹相似三角形的三條判斷法則：（1）三個角對應相等；（2）三條邊對應成比例；（3）一個角相等且夾這個角的兩條邊成比例。這三條法則是《原本》第六卷的命題四、命題五和命題六，而今天中學幾何的全部內容除相似三角形以外都在前面五卷出現了！爲何如此呢？

原來《原本》第五卷是關於比例理論的，有了嚴謹的比例

理論作根據，才提出一條關鍵定理，即第六卷的命題二：若一直線平行於三角形的一邊，則它截三角形兩邊成比例線段；又若三角形的兩邊被截成比例線段，則截點的連線平行於三角形的另一邊。有了這條定理那三條相似三角形法則便不難證明了。教師若不能從一個較高的觀點看問題，很容易利用了相似三角形的性質證明平行線分線段成比例定理，這其實是顛倒過來了。

當然這個獨特的例子有其背後的理由。伍鴻熙曾指出：雖然我們可以利用 SAS 足以推出 SSS 及 ASA，但其實三個中的每一個我們都可假定作爲起點，推出另外的兩個。換句話說，《原本》中的命題與命題之間的推導順序不一定是唯一的合理順序。例如，按照《原本》我們是假設了內錯角相等則兩直線平行,然後去證明對頂角和同位角的情況，不過我們也可以假定對頂角和內錯角去證明同位角。當然，同位角比內錯角更具幾何直觀。

二、鄰區公理系統

伍鴻熙還指出：若用傳統的方法，從公理系統學起，先講解何謂公理、定理……再慢慢由公理推導，或許可能會用上不少時間。例如，要到中學的階段才可推出三角形內角和定理，這不僅費時，且不切實際。所以他大力提倡他“鄰區公理系統”的想法，如圖 3-19 所示。就是先假設了一些大衆直觀上均會認同的定理，從這些基本定理出發就可以很快地推導精妙的幾何性質。

另外，還有利用學校數學研習組（School Mathematics Study Group：SMSG)的公設系統。這個系統包含 22 個公設。

公理 → 一些基本定理 → 更精妙的幾何性質

圖 3-19 鄰區公理系統的想法

詳情可參閱附錄 8。

不同的學者對公設的選擇或有異議，但 SMSG 公設系統經歷了數十年的發展，仍屹立不倒，可見它是一個數學教育的智慧結晶，既可信亦實用。當然，這些“衍生公設系統”還是持續發展着的。1983 年芝加哥大學的學校數學計劃（The University of Chicago School Mathematics Project：UCSMP）便在 SMSG 的基礎上發展了强調直觀理解的 UCSMP 公設系統。

三、定理的論證：由實驗幾何過渡到論證幾何

實驗幾何的想法在幾十年前就已經有了。目前計算機互動幾何（Dynamic Geometry：DG）便可做到很好的效果。早在 20 世紀 70 年代，項武義等人主持編寫幾何教材時是想通過符號邏輯由實驗幾何過渡到論證幾何。更確切地說，是“由直觀幾何形象分析歸納出幾何基本概念和基本性質，通過集合論、簡易邏輯轉入歐氏推理幾何，處理直線形、圓、基本軌迹與作圖、三角比與解三角形等基本內容”，這個教材的實驗效果也非常理想。現時的符號邏輯其實可以以一些推理工具來代替，如圖 3-20 所示。

這些推理工具不同於枯燥的命題運算（statement calculus），而是通過數學例子導出一些關鍵性的邏輯觀念。如張家麟、黃毅英、林智中在《學校幾何課程的重整——爲何教和如何教

實驗幾何 → SMSG 公設 → 推理工具 → 論證幾何

圖 3-20 實驗教材的幾何教學設計

演繹幾何？》一文中便列舉了一些。其中提到避免循環論證及用更强的定理證明特例，這多多少少已有着演繹系統的想法。簡單地說，就是不能用後面的命題倒過來證前面的命題(不過，如前所述，《原本》命題的次序也不是絕對不可討論的，其他定理也如此。有時數學上有所謂“等價定義”，即若以甲命題作定義，可推出乙命題；但其實也可用乙命題作定義，甲命題則變成定理）。

在推理證明當中，也會遇到“充要條件”、或者運用反證法，這些等同於反置律（law of interposition）。即“$p \Rightarrow q$”等同“$\sim q \Rightarrow \sim p$”，故可以通過證明“$\sim p$ 是不可能的”來證明 p，這便是反證法。導致矛盾在英文書籍中，通常用“!!!”表示“導致矛盾”，也有一些教師喜歡用“ ”。這個符號就是“矛”與“盾”！

另外，對於“所有”（∀）及“存在”（∃），事實上“所有”是廣義的“和”（and：合取），而“存在”是廣義的“或”（or：折取）。例如，Kuratowski[4] 索性就用 $\bigwedge_{x\in p}$ 來代表“for all”（所有的），用 $\bigvee_{x\in p}$ 來代表“there exist”（存在）。例如 $x^2+3>2$，“for all $x\in \mathbf{N}$”就等價於（$0^2+3>2$）∧（$1^2+3>2$）∧（$2^2+3>2$）∧（$3^2+3>2$）∧…故此它可看成一“大∧”。“there exist”的情況類似。

[4] Kuratowski, K. (1962). *Introduction to set theory and topology*. Oxford: Pergamon Press.

此外，還有“對於每一個 x，（均）有（一個）y ...”、“有一個 y，對於每一個 x ...”等的區別，如“對於每一個 x，有一 y，使得 $x+y=1$”是對的，而“有一個 y，對於每一個 x 均有 $x+y=1$”是錯的。這又可聯繫到“$\exists!$”（存在唯一的）的概念。

四、幾何變換

對幾何圖形的研究，包括一些線性變換，如平移、旋轉、反射、位似等。從集合的角度出發，對於變換，我們有如下一些定義：

如果把集合 A 到自身的映射 f：A→A 稱爲集合 A 的一個變換，則集合 A 到自身的一一映像稱爲集合 A 的一個一一變換。

我們也把平面看成平面上所有點組成的集合，通常用 π 表示，並把平面 π 到自身的映射，叫做平面 π 上的點變換，把平面 π 到自身的一一映射，叫做平面 π 上的一一點變換。

在平面中，旋轉、平移和反射變換都有一個特質，就是它們都保持距離不變，這些保持距離不變的變換稱爲等距變換（isometry）。然而只有旋轉、反射方爲線性變換，因要保持原點不變。有趣的是，旋轉可分拆成兩個反射。於高階的情況即爲有名的 Cartan（Élie Cartan, 1869-1951）定理：$\mathbf{R}^n$（$n \geq 0$）的等距變換可表示爲不多於 n 個（$n-1$）維平面反射的積。當然，線性變換於線性空間中有更多討論[5]。線性變換也可用矩

[5] Leung, K. T. (1974). *Linear algebra and geometry*. Hong Kong: Hong Kong University Press.

陣代表，在此不贅。

1. 平移

把平面上的任一點 P，在該平面內，沿着一個定方向，移動定距離，變到點 P′，我們把平面上的這種（點）變換，叫做（平面上的）平移變換，簡稱平移。上述定方向稱爲平移的方向，定距離稱爲平移的距離，上述點 P′ 稱爲點 P 在平移下的象，點 P 稱爲 P′ 在平移下的原象，點 P 和點 P′ 稱爲平移下的一對對應點。直觀地說，平移變換就是將平面上的每一點作相同的平行移動。具體描述一個平移，既要指明平移的方向，又要指明平移的距離。

平移變換有兩個不變性質：

（1） 平移把任一線段變成與它平行且相等的線段，即任一線段在平移下保持方向和長度不變。

（2） 平移把任一三角形變成與它全等的三角形。一般的，平移把任一圖形變成與它全等的圖形。

要注意的是，平移不是線性變換，因此，變換不滿足向量加法的封閉性。

2. 旋轉

所謂旋轉，就是在平面上，已知一個定點 O，將平面上任一點 P，繞點 O 旋轉一個定角 θ（規定按逆時針方向轉動時角爲正，按順時針方向轉動時角爲負）得到點 P′。平面上將點 P 變成點 P′的上述變換，叫旋轉變換，簡稱旋轉。上述定點 O 叫旋轉中心，定角 θ 叫旋轉角。點 P 和點 P′稱爲旋轉變換下的一對對應點，P′稱爲 P 的象，P 稱爲 P′的原象。

旋轉變換有以下 5 個性質：

（1） 旋轉變換是平面上的一一變換。
這是由於對於任意一個旋轉來說，平面上任何兩個不相同的點的象仍不相同，且平面上任一點都可由某一點經過該旋轉得到，即每一點都有原象.

（2） 恆同變 2 換是旋轉變換。
我們可以把恆同變換 I 看成是以任一點 O 爲旋轉中心，旋轉角爲零的旋轉變換，即 $I = R(O, 0)$。

（3） 任一旋轉變換的逆變換仍是旋轉變換。
旋轉變換 $R(O, \theta)$ 的逆變換是保持旋轉中心 O 和旋轉角 θ 的絕對值不變，而把旋轉的方向反過來（把順時針方向改爲逆時針方向，把逆時針方向改爲順時針方向）的一個新的旋轉變換，即 $(R(O, \theta))^{-1} = R(O, -\theta)$。

（4） 旋轉中心相同的兩個旋轉變換的乘積仍然是一個有同一旋轉中心的旋轉變換。

（5） 除恆同變換外，旋轉變換有唯一的不動點——旋轉中心。

如果一個點與它在變換 f 下的象重合，我們就稱該點是變換了的一個不動點（或不變點），直觀地說，一個變換的不動點就是在該變換下不變的點。旋轉中心是在旋轉變換下保持不變的唯一一個點，因此它是旋轉變換的唯一不動點。圖形在旋轉變換下的不變的性質：

（1） 旋轉保持任意兩點間的距離不變，或者說，兩點間的距離是旋轉下的不變數。

（2） 旋轉保持任意一個角的大小不變，或者說，角度是旋轉下的不變數。

（3） 旋轉把任一三角形變成與它全等的三角形。一般的，旋轉把任一圖形變成與它全等的（或說合同的）圖形。

（4） 旋轉變換下任意一對對應直線的夾角都等於旋轉角。

【案例 3-6】 如圖 3-21 所示，在$\triangle ABC$中，已知：$AB=AC$，D是三角形內部一點，並且$\angle ADB>\angle ADC$。求證：$DB<DC$。

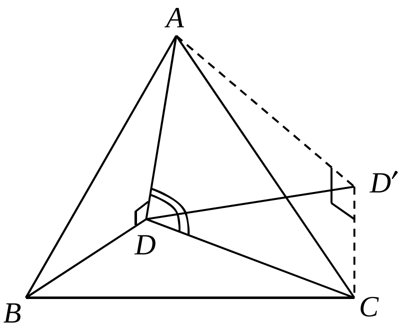


圖 3-21 旋轉

分析：DB，DC是$\triangle BCD$的兩邊，如果證明了$\angle BCD<\angle CBD$問題就解決了。但已知條件$AB=AC$以及$\angle ADB>\angle ADC$，與$\angle BCD$，$\angle CBD$ 沒有甚麼比較明顯的聯繫。爲發現它們之間的聯繫，我們把含有$\angle ADB$的$\triangle ABD$旋轉到$\triangle ACD'$的位置，即作$\triangle ACD' \cong \triangle ABD$（由於$AB=AC$，所以以上的辦法是可能的）。這時$AD=AD'$，$\angle AD'B>\angle ADC$，$D'C=DB$，問題轉化爲證明$D'C<DC$。

詳細證明如下：如圖 3-21 所示，作$\triangle ACD' \cong \triangle ABD$，連接線段$DD'$，由於$AD'=AD$，所以$\angle ADD'=\angle AD'D$。而$\angle AD'C=\angle ADB>\angle ADC$，所以$\angle CDD'<\angle CD'D$，所以$D'C<DC$，即 $DB<DC$。

把保持平面上任意兩點間的距離不變的變換，稱爲平面上的等距變換，因此平移和旋轉便都是等距變換。由於任意一個圖形在等距變換下，其形狀和大小都不改變，即每一個圖形都與它在等距變換下的象合同（即全等），因此，等距變換也稱爲合同變換。

幾何學中的平移和旋轉，是兩種最常見的等距變換，它們有其物理背景。它們是物理學中最基本的剛體運動形式。在物理學中，我們把物體看成是由質點組成的。質點和幾何中的點一樣，也是抽象化的模型，它沒有大小，但有質量。剛體是一種特殊的質點組，其中，任何兩個質點間的距離，不因力的作用而發生改變，剛體和質點一樣，也是一種抽象，是一種理想化的模型。

3. 軸反射變換

平面上已知直線 l，若兩點 P 和 P′所連線段 PP′被直線 l 垂直平分，就稱點 P 和 P′是以直線 l 爲對稱軸的一對對稱點，也稱 P 和 P′關於 l 爲軸對稱。

平面上已知一條直線 l，把平面上任一點 P 變成 P′，使 P 和 P′是以直線 l 爲對稱軸的一對對稱點的變換，叫做平面上的軸對稱變換，也叫軸反射變換。對稱軸 l 也叫對稱軸或反射軸。P 和 P′是一對對應點，軸上的點自己和自己對應。

如果將紙沿着其上的一條直線對折，那麼紙上經過對折後能互相重合的兩個圖形，叫做以這條直線爲對稱軸的對稱圖形，特別地，如果將一個圖形沿一條直線對折，直線兩旁的部分能互相重合，那麼這個圖形叫軸對稱圖形，這條直線就是它的對稱軸。

軸反射變換有以下 4 個性質：

（1） 軸反射變換是平面上的一一變換。

（2） 任一軸反射變換的逆變換就是該軸對稱自身。

（3） 任一軸反射變換連續施行兩次就等於一個恆同變換。因而任意兩個軸對稱的乘積不再是軸反射。

（4） 對稱軸上的點是軸反射變換下的不變點，對稱軸是不變直線。

圖形在軸反射變換下不變的性質和不變數：

（1） 任意兩點間的距離在軸反射變換下保持不變，即兩點間的距離是軸對稱下的不變數。

（2） 任一三角形與它在軸反射變換下的象（三角形）全等，一般的，任一圖形與它在軸反射下的象合同（全等）。因而角度和面積也是軸反射下的不變數。

【案例 3-7】 如圖 3-22，MN 垂直平分線段 AB, CD，垂足分別爲 E、F，求證：$AC = BD$，$\angle ACD = \angle BDC$。

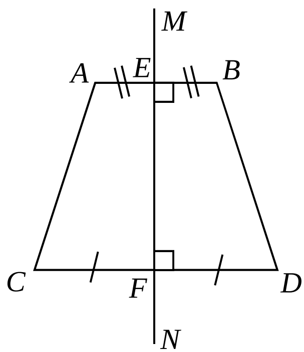


圖 3-22 軸反射變換

分析：這個證明題可以使用三角形全等的方法，但是需要做輔助線。事實上，使用軸對稱的方法，可以很容易的解決問題，

也就是四邊形 $AEFC$ 和 $BEFD$ 關於直線 MN 是軸對稱（或反射對稱）的。

4. 位似變換

兩個相似圖形，如果對應定點的連線交於一點 O，則稱它們是位似的，點 O 稱爲位似中心。兩圖形位似時，對應邊的比稱爲位似比。

設 O 爲平面上的一個定點，把平面上任一點 P 變成直線 OP 上的一點 P′，使 $\overrightarrow{OP'} = k\overrightarrow{OP}$ 的變換，稱爲位似變換。上述定點 O 叫做位似中心，常數 k 叫位似比。

位似變換有以下五個性質：

（1） 位似變換是平面上的一一變換。

（2） 平面上的恆同變換是一個位似變換。

（3） 每一個位似變換的逆變換仍是一個位似變換。

（4） 具有相同位似中心的任意兩個位似變換的乘積，仍是一個具有相同位似中心的位似變換。

（5） 兩個不同位似中心的位似變換的乘積，或者是一個位似變換（此時三個位似中心共線），或者是一個平移（平移的方向平行於兩個中心的連線）。

在平面中，旋轉跟平移或反射各有不同。例如，以原點爲中心的旋轉變換是線性變換，原點是不動點。非平凡的平移則不會保持原點不變，故不可能是線性變換。同理，當反射軸不是通過原點時，反射變換也不是線性的。但旋轉、平移和反射變換都有一個特質，就是它們都保持距離不變，這些保持距離不變的變換稱爲等距變換（isometry）。

第四節　空間能力

除了圖形認識和幾何推理外，空間能力已成爲近年的一個重要教學目標。空間能力不局限立體空間，而最著名的要算范希爾夫婦[6] 的五層水平了，下面簡述如下：

層次 0：視覺（visuality）

學生能通過整體輪廓辨認圖形，並能操作其幾何構圖元素（如邊、角）；能畫圖或仿畫圖形，使用標準或不標準名稱描述幾何圖形；能根據對形狀的操作解決幾何問題，但無法使用圖形的特徵或要素名稱來分析圖形，也無法對圖形做概括的論述。例如，學生可能會說某個圖形是三角形，因爲它看起來像一個“三明治”。

層次 1：分析（analysis）

學生能分析圖形的組成要素及特徵，並依此建立圖形的特性，利用這些特性解決幾何問題，但無法解釋性質間的關係，也無法瞭解圖的定義；能根據組成要素比較兩個形體。利用某一性質做圖形分類，但無法解釋圖形某些性質之間的關聯，也無法導出公式和使用正式的定義，例如，學生會知道三角形有三條邊和三個角，但不能理解如果內角越大，那麼它所對的邊越長的性質。

層次 2：非形式化的演繹（informal deduction）

學生能建立圖形及圖形性質之間的關係，可以提出非形式化的推論。瞭解建構圖形的要素，能進一步探求圖形的內在屬性和其包含關係。使用公式與定義及發現的性質做演繹推論。

---

[6] Van Hiele, P. M. & van Hiele-Geldof, D. (1958): A method of initiation into geometry at secondary schools. In: H. Freudenthal (ed.), *Report on methods of initiation into geometry*. Groningen: J. B. Wolters, 67-80.

但不瞭解證明的重要性，不能由不熟悉的前提去證明結果的成立，也不能建立定理網格之間的內在關係。例如，學生瞭解了等腰三角形的性質後，他們會推出等腰直角三角形同時也是直角三角形的一種，因爲等腰直角三角形較直角三角形多了一些性質的限制。因此，學生能做一些非正式的說明但還不能作系統性的證明。

層次 3：形式的演繹（formal deduction）

學生可以瞭解到證明的重要性和瞭解“不定義元素”、“公理”和“定理”的意義，確信幾何定理是需要形式邏輯推演才能建立的，理解解決幾何問題必須具備充分或必要條件：能猜測並嘗試用演繹方式證實其猜測，能夠以邏輯推理解釋幾何學中的公理、定義、定理等，也能推理出新的定理，建立有一條邊對應相等或至少一個角對應相等是證明兩個三角形全等的必要條件，兩角及夾邊對應相等則是兩個三角形全等的充分條件。能寫出一定理的逆定理，例如，平行四邊形的對角線互相平分，其逆定理是對角線互相平分的四邊形是平行四邊形。

層次 4：嚴密性（rigior）

在這個層次，學生能在不同的公理系統下嚴謹地建立定理，以分析比較不同的幾何系統。例如，歐氏幾何與非歐氏幾何系統的比較。

對於立體空間能力，McGee[7] 把它定義爲操弄、旋轉、扭動、返轉一個圈的思維能力，分出空間想象力及空間移動力（spatial orientation）。

[7] McGee, M. G. (1979). Human spatial abilities: Psychometric studies and environmental, genetic, hormonal, & neurological influences. *Psychological Bulletin, 86,* 879-918.

第四章　測量

測量是我們日常生活和數學學習當中常有的活動。除了懂得測量，作爲教師，更需要知道測量背後的原理，甚至包括對測量對象的認識。

測量可謂數學與現實世界的一道橋梁，傳統幾何往往有“去量度化”的傾向，由此可知常見的測量當然包括長度（包括曲線的長度）、面積、體積、其實也包括角度等，本章最後將介紹誤差及其計算。

其中，我們不只涉及各種測量的計算（公式），亦觸及它們的數學本質。

第一節　測量簡介

測量的結果是一個數，它表明待測物體某一方面的屬性與具有同一屬性的測量單位之間的一種比值（即待測量 = 數 × 測量單位）。通常，我們所用的測量單位較小，如測量教室的長度，我們可以把多個相同的長度單位緊挨着待測的長度排成一行，所用單位的數目就是該屬性的測量。中小學多數的測量屬性常可被具有同一屬性的測量單位所填充、覆蓋或是匹配（如測量重量需要的平衡就是一種匹配）。有了這樣的理解，測量就是用具有同一屬性的測量單位去填充、覆蓋或匹配。

所以測量一般包括這樣的三個步驟：

(i)　確定所要測量的屬性；

(ii)　選擇具有同一屬性的測量單位；

(iii) 通過填充、覆蓋或匹配等方法比較待測物體與測量單位，進行測量。

對於測量的基本內容，主要包括長度、面積、體積和容積、重量和質量、時間、角度等。對每一個對象的測量，都會涉及到測量單位，學生可能會試圖尋找更小的單位或分數單位進行更精確的測量。儘管更小的單位能提高精確程度，但因爲從數學的角度來講，沒有最小的單位，所以測量的誤差總是存在的。因此，在所有的測量活動中，都要强調近似語言的使用。

一、長度的量度

長度是學生學習的第一個測量內容。然而，對很多學生而言，長度測量並不容易立刻理解。

1. 直線段長度的測量

任何測量的活動，都必需先選定一個單位長度（如厘米、米、千米等），才可進行量度。現在讓我們先選定u_1爲單位長度。設有直線段 ℓ_1，用單位長直線段u_1來量度 ℓ_1。若發現 ℓ_1 較 2 段u_1爲長，但比 3 段u_1爲短，如圖 4-1 所示，則稱剩餘未量的線段爲ℓ_2。

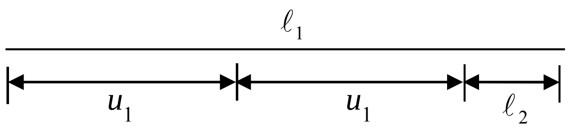


圖 4-1　直線段長度的測量

接下來將u_1平分爲 10 等份（分成 10 份雖只是一個習慣，但也考慮了計算是否方便），稱每一小線段爲u_2（作爲新的量

度單位，$u_2=\dfrac{1}{10}u_1$）。用u_2來量度ℓ_2，設ℓ_2又較 9 段u_2長而比 10 段u_2短，則再把剩餘未量的線段稱爲ℓ_3，並將u_2再平分爲 10 等份，稱每一更小線段爲u_3（作爲第二新的量度單位，$u_3=\dfrac{1}{10}u_2$）。用u_3量度ℓ_3，設ℓ_3又較 5 段u_3長而比 6 段u_3短，則又把剩餘未量的線段稱爲ℓ_4，如此重複地做下去，直至把該線段ℓ_1量度完畢爲止。

由於 $u_2=\dfrac{1}{10}u_1$，$u_3=\dfrac{1}{10}u_2=\dfrac{1}{100}u_1$，

而 $\ell_1=2u_1+9u_2+5u_3+\cdots$

$$\ell_1=2u_1+\frac{9}{10}u_1+\frac{5}{100}u_1+\cdots，$$

一般表示爲 $\ell_1=2u_1+0.9u_1+0.05u_1+\cdots=(2.95\cdots)u_1$。

如果在上面 ℓ_3 剛爲 u_3 的五倍，那麼 $\ell_1=2u_1+0.9u_1+0.05u_1=2.95u_1$。如果$u_1$爲 1 厘米，我們就說$\ell_1$長爲 2.95 厘米。這種方法可用於量度任何直線段，但有可能永遠量不完（如ℓ_1較u_1的長度爲無理數，甚至超越數一類）。

2. 折線長度的測量

折線是由幾段直線段首尾相接而成的線。利用測量直線段的方法，測量折線的每一段直線段，然後把所有直線段的長度相加，這便是該折線的長度了。

3. 曲線長度的測量

對於曲線長度的測量，很多教科書都會提及幾種原始的方法，比如用繩圍繞曲線進行測量，但這些實驗性的方法卻不能

精確地描述曲線的長度。這裏我們用數學上常用的做法——從已知推未知——來測量。假設現有曲線 C，首先在曲線 C 上取若干點(點與點之間不必等距)，再用直線段連接所有相鄰點，便得折線 L_1，如圖 4-2 所示。

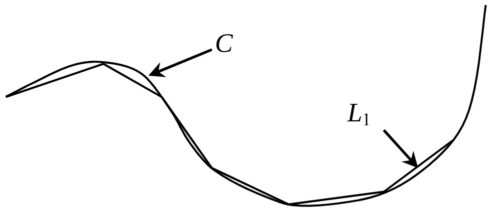


圖 4-2　曲線長度的測量

易見折線 L_1 比曲線 C 短（空間中兩點，最近的距離是兩點之間的直線段長），因此 $L_1 < C$；若要得出更接近 C 的值，則可再在 C 上將已取的點兩兩之間加一點，使曲線 C 上的點更爲密集；再用直線段連接相鄰點，得出新折線 L_2，如圖 4-3 所示(虛線爲 L_1 上的線段，實線爲新得出的 L_2 上的線段)，易見 $L_1 < L_2 < C$。

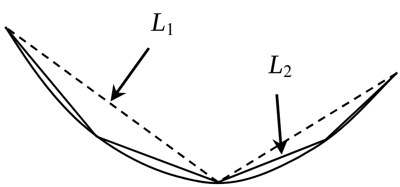


圖 4-3　曲線長度的更準確測量

所以只要把上面的方法重複地做下去，便可逐步去逼近曲線 C 的長度。

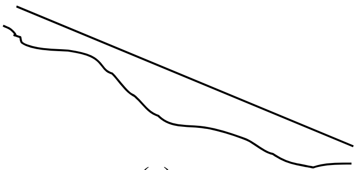
以上的方法是用一連串折線來逼近曲線，到了極限情況時

，就得出 C 的長度。所以，對於給出的任何曲線 C，我們可定義 C 的長度如下：

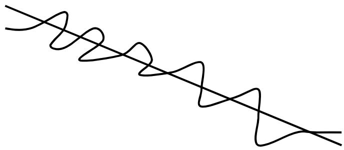
找一連串折線 L_n（$n = 1, 2, 3, 4, \cdots$），使得 L_n 逼近 C；則 C 的長度便定義爲 L_n 的長度的極限。

這當然已經用了微積分的方法處理曲線長度，而準確的做法就應正式利用微積分的概念和技巧。以上的方式固然正確，但不要錯以爲兩條曲線（或曲線與分析線）愈貼近，他們的長度就爲相近。

一條曲線可以和另一曲線（直線）很“貼近”，但長度仍可有很大差距，如圖 4-4 所示。



(a)



(b)

圖 4-4 以直代曲

如果曲線 C 是一個圓周，可以選 L_n 爲內接正 n 邊形的周界，如圖 4-5 所示。易見當 n 越大，正 n 邊形的周界越接近圓周，亦即正 n 邊形周界可逼近圓周，使得 L_n 的長與圓周的長的差是充分小。其實劉徽的割圓術是切割圓面積而非以折線逼近圓周的，原因是這個方程更穩妥。

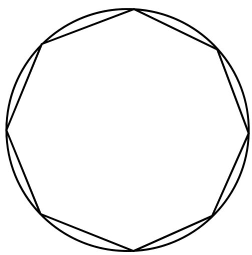


圖 4-5 圓周及正 n 邊形的周界

以下我們再舉幾個例子予以說明：

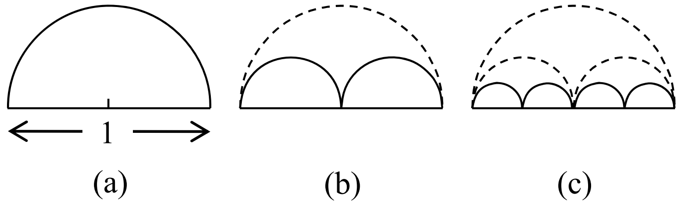


圖 4-6 弧形組雖越來越貼近直徑，但弧形組總長度總是$\pi/2$，不會越來越接近直徑長度

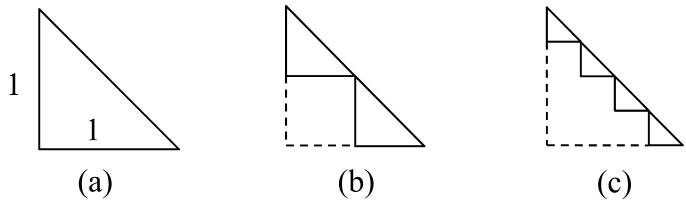


圖 4-7 折線長度總和總是 2，不會趨近$\sqrt{2}$。

再看一個我們在高中會接觸的例，爲計算 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}$，考慮圖 4-8 中直角三角形 $\triangle OAD$，AC 爲圓弧，點 B 爲點 A 爲在線段 OD 的垂足。

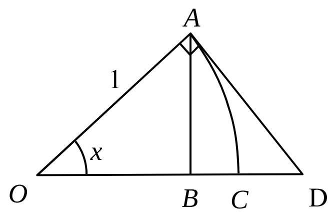


圖 4-8 比較面積而非長度

由於　$\overline{AB} < \overset{\frown}{AC} < \overline{AD}$，

故　$\sin x < x < \tan x$，

得　$\cos x < \dfrac{\sin x}{x} < 1$，

兩邊取極限，得

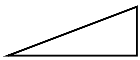
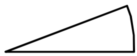
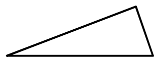
$$1=\lim_{x\to 0^+}\cos x\ \le\ \lim_{x\to 0^+}\frac{\sin x}{x}\ \le 1，$$

即 $\displaystyle\lim_{x\to 0^+}\frac{\sin x}{x}=1$，

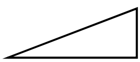
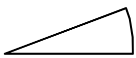
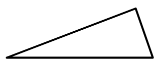
利用 $\sin(-x)=-\sin x$，可證 $\displaystyle\lim_{x\to 0^-}\frac{\sin x}{x}=1$，

從而得出 $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$。

這個結果是對的，但求解的方法卻是錯的！原因就是如上所述。常見的證明並不是這樣的（可查閱任何一本常見的教科書）。我們可以看到，若採用面積，我們有

面積（）≤ 面積（）≤ 面積（）

那就可以進行逼近。這是因爲

 $\subset$  $\subset$ 

即前面圖形的面積是後面圖形面積的一部份。即是說像圖 4-9 那樣，若 $R_1\subset R_2$，$R_2=R_1\cup R_3$，而 $R_1\cap R_3=\phi$。按照測度公理，$S(R_2)=S(R_1\cup R_3)=S(R_1)+S(R_3)\ge S(R_1)$（因 $S(R_3)\ge 0$）。

進一步比較曲線、弧長和圓柱體體積就發現中間有不少微妙的處理。我們知道，若曲線可以表示爲 $y=y(x)$的連續可微

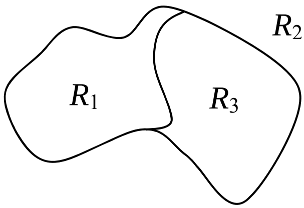


圖 4-9 子集面積必不大於母集面積

函數，對於 $a \le x \le b$，則曲線上弧長的計算爲

$$\int_a^b \sqrt{dx^2 + dy^2} = \int_a^b \sqrt{1 + (\frac{dy}{dx})^2}\,dx \text{ ，}$$

如圖 4-10 所示。

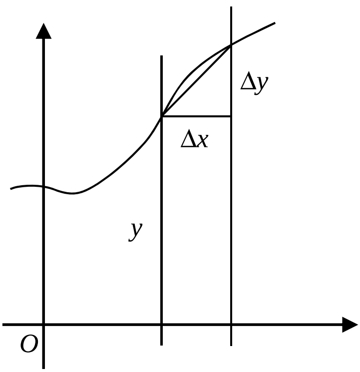


圖 4-10 弧長的計算

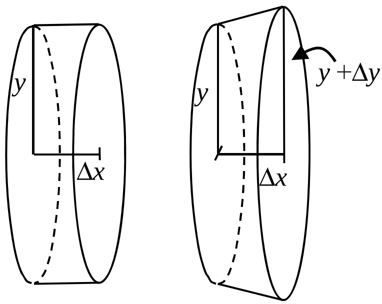


圖 4-11 體積的計算

旋轉柱體體積則是：$\int_a^b \pi y^2 dx$，如圖 4-11 所示。爲何計算弧長要考慮斜邊（要動用勾股定理），旋轉體需要考慮圓柱體

而非圓臺，其實是與無限的階有關。

二、面積的測量

面積測量就是用面積單位來覆蓋所測對象的面積，這才是對面積測量概念的正確理解，而不管你用甚麼樣的單位。面積是一個二維概念，同樣地，學生必須先理解甚麼是面積再進行測量。

在引入各典型圖形（長方形、三角形等）的面積公式前，先要了解面積的特性（公設）。

考慮平面上一個區域，所謂區域，即用簡單的閉曲線圍着的一個點集；這裏的簡單閉曲線即連續曲線而不和該曲線相交（首尾除外）。每一區域都配上一個非負數，這就是區域的面積，以 $S\ (R)$表示區域 R 的面積，則可建立一個面積函數，它的性質如下：

（i） 全部區域的面積都是非負數，即對於任何 R 而言，$S\,(R) \geq 0$。

（ii） 全等的區域有相等的面積。

（iii） 面積是可加的。這就是說，如兩區域 R_1 和 R_2 不相重疊，而合併成一新區域 R，則 $S\,(R) = S\,(R_1) + S\,(R_2)$。若 R_1 和 R_2 合併而成一新區域 R（由一簡單曲線圍着）則它們可能有一部分周界是公共的，如圖 4-12 所示。故此 $S\,(T) = 0$。

下面我們將求“多邊形圍成區域的面積”，或簡稱爲“多邊形的面積”。在本部分及以下各節裏我們假設用相同的長度

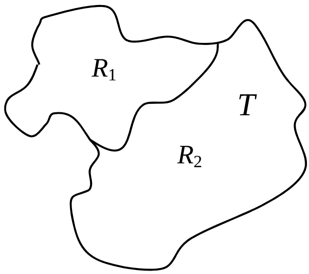


圖 4-12　面積是可加的

單位，故可將單位略去。在沒有混淆的情形下，我們且將由點 A 至點 B 的線段長度簡寫作 AB。

1. 矩形的面積

首先我們定義由長為 1 單位的正方形的面積為 1 基本平方單位，如圖 4-13 所示。

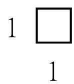


圖 4-13　基本面積單位

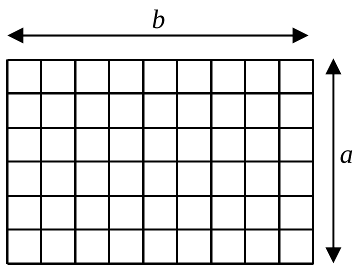


圖 4-14　矩形面積可分割成多個正方形

設矩形的長和闊各為 a 單位和 b 單位。若 a 和 b 都是整數，則矩形顯然可以分割成 ab 個正方形，每邊是一單位長度，如圖 4-14 所示。這時矩形的面積是 ab 個平方單位。當 a 和 b

是有理數的時候，設 $a=\dfrac{h}{k}$，$b=\dfrac{p}{q}$，其中 h、k、p 和 q 是正整數。

拿 kq 個全等的矩形（每個長 a，闊 b）排列成一個大矩形 $ABCD$，如圖 4-15 所示。

則

AB 的長度是 h 單位，BC 的長度是 p 單位，

故

$$S_{(ABCD)} = hp \text{ 單位。}$$

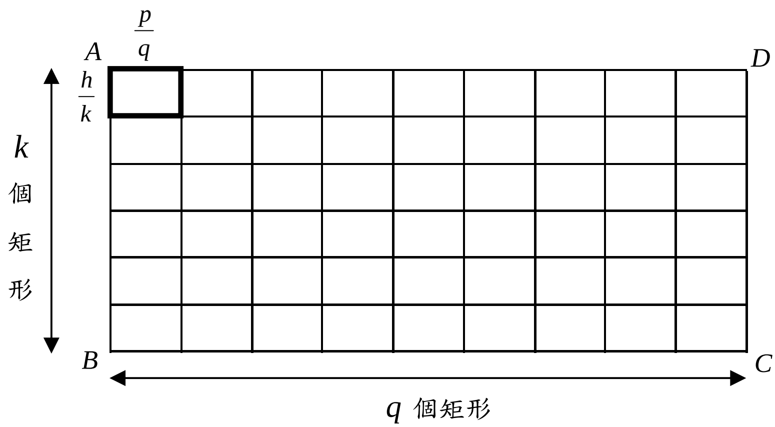


圖 4-15 推導矩形面積公式（當長和闊爲有理數的時候）

但大矩形 $ABCD$ 內有 kq 個小矩形，每個小矩形的面積

$$\frac{1}{kq}S_{(ABCD)} = \frac{hp}{kq} \text{ 平方單位 } = ab \text{ 平方單位。}$$

我們現在假設當 a 和 b 是無理數時，矩形的面積仍是 ab 個平方單位。一般的測量公式推導均局限到 **Q**，而 **R** 的情況就以極限方式得出。

2. 平行四邊形的面積

假設四邊形 $ABCD$，如圖 4-16 所示是一個平行四邊形。AX 和 DY 是直線 $BXCY$ 的垂線。四邊形 $AXYD$ 是一個矩形，由兩區域 R_1 和 R_3 合成。平行四邊形 $ABCD$ 則由兩區域 R_2 和 R_1 合成。

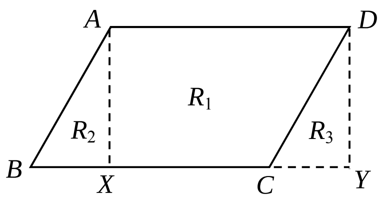


圖 4-16 平行四邊形的面積計算

容易知道，R_2 和 R_3 是全等三角形（讀者可自行證明），則它們的面積是相等的，即 $S_{(R_2)} = S_{(R_3)}$。

故
$$\begin{aligned} S_{(ABCD)} &= S_{(R_2)} + S_{(R_1)} \\ &= S_{(R_3)} + S_{(R_1)} \\ &= S_{(AXYD)} \\ &= AX \times XY \end{aligned}$$

不難發現　　$XY = AD = BC$　，

$\therefore$　　$\mathrm{S}_{(ABCD)} = AX \times BC$。

AX 和 BC 依次稱爲**平行四邊形的高和底**。

這些其實已經利用了面積的特性（ii）和（iii）。這兩條特性也是計算面積時常用的“合併法”和“分割法”的依據。

3. 梯形的面積

如圖 4-17 所示，把梯形顛倒過來，可拼成一個大的平行四邊形，其面積爲 (上底 + 下底)× 高。故此原來梯形的面積就是 [(上底 + 下底)× 高] ÷ 2。

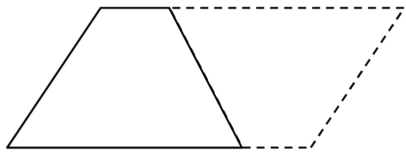


圖 4-17 梯形的面積計算

4. 三角形的面積

若矩形面積能够精確地求出，則三角形的面積也可精確地求出。給出任何一個三角形 T，我們把這個三角形複製後併加到另外的一邊，便得出一個平行四邊形，如圖 4-18 所示。

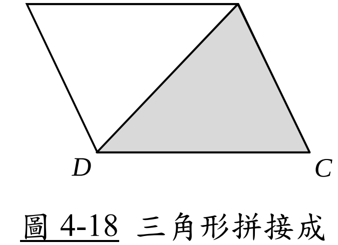


圖 4-18 三角形拼接成平行四邊形

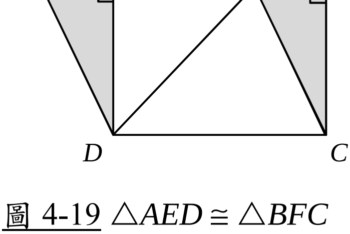


圖 4-19 $\triangle AED \cong \triangle BFC$

由於該平行四邊形是由翻過來的三角形組合而成，因此，*BC* 平行且等長於 *AD*。若在平行四邊形內作一垂直線 *DE*，延長 *AB* 及作垂直線 *CF*，使 *CF* 相交 *AB* 延長線於 *F*，則$\triangle AED \cong \triangle BFC$，如圖 4-19 所示。於是，我們有這樣一個推論：平行四邊形 *ABCD* 的面積和矩形 *CDEF* 的面積應相等。但由於平行四邊形 *ABCD* 是由兩個三角形 *T* 所組成，因此四邊形 *CDEF* 的面積也應等於三角形 *T* 面積的兩倍。換句話說，三角形 *T* 的面積就等於與其同底同高的矩形面積的一半。因此，三角形的面積是“底 × 高 ÷2”。

上面的證明，我們在一般的教科書上都可以看到的。但如果三角形 BCD 的形狀是如圖 4-20 所示，又會怎樣呢？

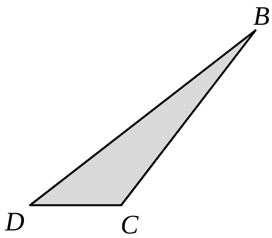


圖 4-20
鈍角三角形 *BCD*

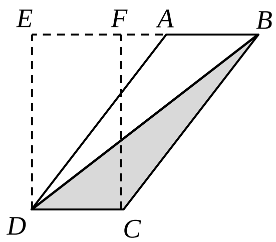


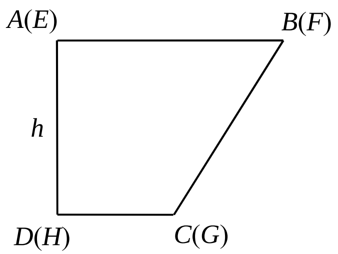
圖 4-21
ABCD 面積 $=2S_{\Delta BCD}$

在這個情形，將對應的圖 4-20 變成圖 4-21，從圖 4-19 所得到的推論，我們知道，四邊形 *ABCD* 與四邊形 *CDEF* 面積相等。在圖 4-21 得情形中，就不那麼明顯了。此時，我們可以將這個推論略作更改，則仍得到同樣的結論：

$$\begin{aligned} & \text{四邊形 } ABCD \text{ 面積 } + \triangle ADE \text{ 面積} \\ = \ & \text{四邊形 } BCDE \text{ 面積} \\ = \ & \text{四邊形 } CDEF \text{ 面積 } + \triangle BCF \text{ 面積} \end{aligned}$$

但$\triangle ADE$與$\triangle BCF$全等，所以$\triangle ADE$面積等於$\triangle BCF$面積。這樣我們不難得到結論：四邊形 $ABCD$ 面積 = 四邊形 $CDEF$ 面積。

上述兩個四邊形面積的相等，我們也可以通過兩塊相同的梯形疊合得到，如圖 4-22(a)：



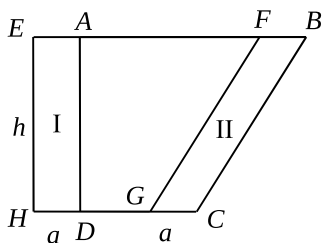


圖 4-22(a) 兩個梯形的疊合　　圖 4-22(b) 梯形平移 a 個單位

將其中一個梯形 $EFGH$ 沿着底邊移動邊長 a 個單位，得到四邊形 $ADHE$（I）的面積和四邊形 $FBCG$（II）的面積相等，如圖 4-22(b)，而且有 $\mathrm{I}=\mathrm{II}=ah$。

現在，我們就可以說，在任何情況下，

$$\textbf{三角形的面積} = \frac{1}{2}（\textbf{底} \times \textbf{高}）。$$

綜上所述，我們可以斷言：所有線性圖形的面積皆可精確地求出。

究其原因，是因爲線性圖形可被分割成有限多個三角形。

若要嚴格證明這個事實，是很複雜的。具體來說，我們只要懂得如何分割便行。基於此，只要是線性圖形，無論多複雜，我們只要將其分割成有限多個三角形，其面積便可精確地求出。

有了“求線性圖形面積的方法”作基礎，我們就能用逼近法推出“求任意區域面積的方法”。當中的技術細節是很複雜的，比討論長度時複雜得多，我們在此避而不談；但基本上解決的想法是一樣的。亦即，設 S 爲一任意圖形如圖 4-23 所示，且有一列線性圖形 S_n ，使 $S_n \subset S$ ，且 S_n 逼近 S （$n \to \infty$）。

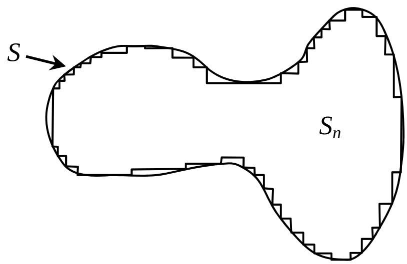


圖 4-23 線性圖形的逼近

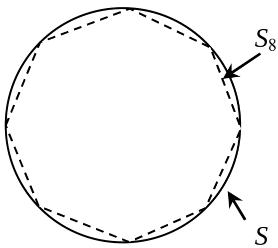


圖 4-24 正多邊形的逼近

這個“逼近”的意義可以這樣認爲：對任意的 $x \in S$ ，則所有充份大的 n 都滿足 $x \in S_n$。由於 S_n 是線性圖形，所以 S_n 的面積有定義。現在定義：S 面積 $= \lim_{n\to\infty} S_n$ 的面積 。例如，如圖 4-24 所示，如果 S 爲圓盤，S_n 爲一個內接於 S 圓周的正 n 邊形，則 S_n $(n \to \infty)$ 的面積逼近 S 的面積。

三、圓周與圓面積

1. 圓與圓周率

衆所周知，圓形面積與圓周率有密切關係，中西祖先早就

知道圓周周長與直徑成正比，而圓面積 $=$(圓周 $\times$ 半徑) $\div 2$。中國古代（劉徽、祖沖之等）於計算圓周率有着輝煌成就。

亞伯拉罕・巴海雅・哈–納希（Abraham bar Hiyya ha-Nasi, 1070 - 約 1145）在公元十二世紀的《量度論》（*Treatise on Measurement and Calculation*）提供了一個很美妙的方法，如圖 4-25 所示。把圓盤像洋葱般逐層打開，形成了等腰三角形，底邊爲圓周，高爲半徑，於是圓的面積就等於 (圓周 $\times$ 半徑) $\div 2$。此外，亦可把圓切割爲 $2n$ 個扇面，如圖 4-26 所示，再拼成一個近似矩形的圖形，也得出面積 $=$(圓周 $\times$ 半徑) $\div 2$。

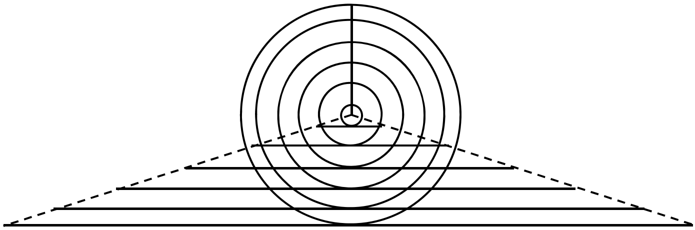


圖 4-25 計算圓面積的方法

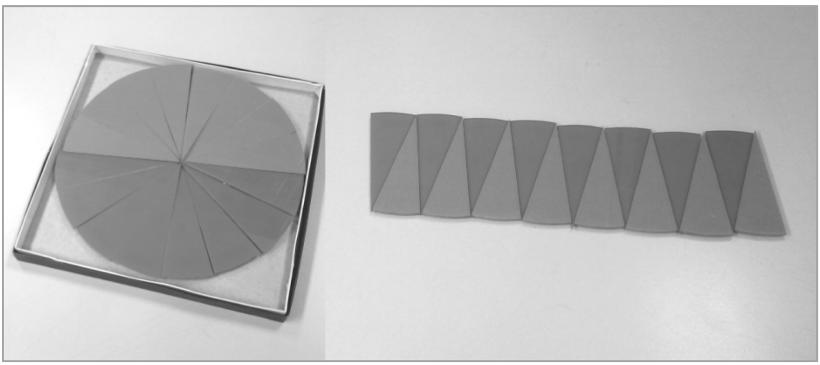
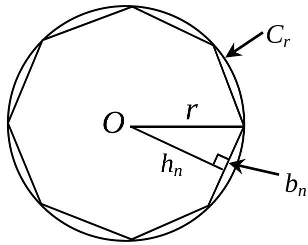


圖 4-26 計算圓面積的教具

2. 圓的周長與面積

給出一圓，其半徑爲 r，圓周爲 C_r，在圓內畫一個圓內接正 n 邊形，且每邊的邊長爲 b_n。由圓心作一條垂直線到每邊，此線長度爲 h_n，因此當 $n \to \infty$，$h_n \to r$，又 $n \times b_n \to C_r$，如圖 4-27 所示，所以正 n 邊形的面積（$=\frac{1}{2}nb_nh_n$）$\to \frac{1}{2}rC_r$，並等於圓盤的面積。根據圓盤面積公式，圓盤面積 $= \pi r^2$，所以有：

$$\pi r^2 = \frac{1}{2}rC_r \text{，}$$
$$\pi r = \frac{1}{2}C_r \text{，}$$
$$C_r = 2\pi r \text{。}$$



這便是求圓周周長的公式。而上面所定義的實數 π，就是常見的所謂“圓周率”。

圖 4-27 圓的周長擴大

四、體積的測量

1. 長方體體積

體積的建立與面積類似，不過較爲複雜。其中長方體的體積公式比較容易得到，再就是錐體，而通常我們也只針對比較特殊的錐體。同樣，我們也需要假設基本體積單位，就是邊長爲 1 單位的正方體，其體積爲 1 立方單位。由此，容易證得長方體的體積公式，而一般的平行六面體（或稱爲斜立方體）也不難得出。

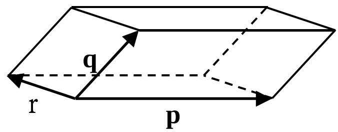


圖 4-28 斜立方體的體積

斜立方體，如圖 4-28 所示。若以向量 **p**、**q** 和 **r** 表示相應邊長，則相應斜立方體的體積爲 $\mathbf{p}\bullet(\mathbf{q}\times\mathbf{r})$（亦等於 $(\mathbf{p}\times\mathbf{q})\bullet\mathbf{r}$），名爲 **p**、**q** 和 **r** 的三重積。

2. 錐體

一般來說，體積不可能不用微積分或類似微積分的手段算出。錐體亦是一樣。一些特例可用切割法得出，如圖 4-29 所示。總的來說，柱體（不管是角柱體，還是圓柱體）體積 ＝ 底面積 × 高；具有均匀横切面立體的體積 ＝ 横切面面積 × 高。錐體（角錐體或圓錐體）體積 ＝(底面積 × 高)÷3。

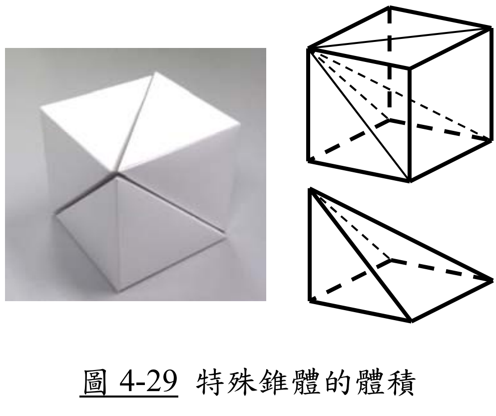


圖 4-29 特殊錐體的體積

下面我們給出圓錐體體積的推導過程：

將一個底半徑的 r，高爲 h 的圓錐體，平行其底切割成 n 個等高的平截頭體（frustum）（最高的那個是一個小圓錐體）。將其中一個的平截頭體（梯形 $BDJF$）的截面展示如下，如圖 4-30 所示。

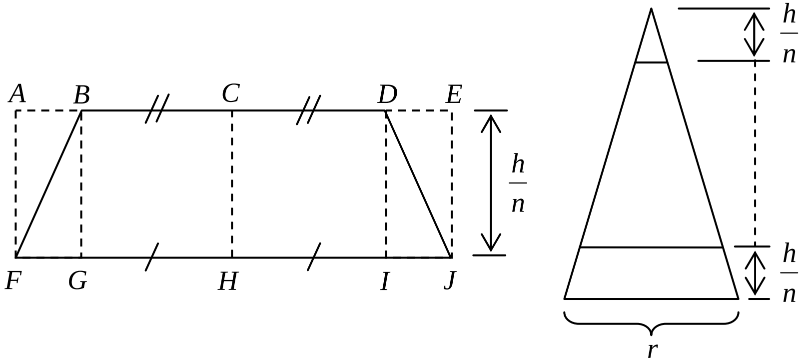


圖 4-30　圓錐體體積的計算

可知，每個平截頭體（梯形 $BDJF$）的體積必不大於以下底（FJ）爲直徑，以 $\frac{h}{n}$ 爲高的圓柱體體積，亦不小於以上底（BD）爲直徑，以 $\frac{h}{n}$ 爲高的圓柱體體積。

設此平截頭體爲從上至下的第 k 個，則有：

$$BC = CD = \frac{r(k-1)}{n}\text{，}FH = HJ = \frac{rk}{n}\text{。}$$

因此，平截頭體的體積 $V(k)$ 必介於：

$$\pi\left(\frac{r(k-1)}{n}\right)^2\left(\frac{h}{n}\right) < V(k) < \pi\left(\frac{rk}{n}\right)^2\left(\frac{h}{n}\right)\text{，}$$

$$\frac{\pi r^2 h}{n^3}(k-1)^2 < V(k) < \frac{\pi r^2 h}{n^3}k^2 \text{。}$$

將以上的不等式由 $k=1$ 加至 $k=n$，則由於

$$V = V(1)+V(2)+...+V(n) \text{，}$$

$$\sum_{k=1}^{n}(k-1)^2 = \frac{1}{6}(n-1)(n)(2n-1) \text{，}$$

$$\sum_{k=1}^{n}k^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1) \text{，}$$

$$\therefore \quad \frac{\pi r^2 h}{n^3}\cdot\frac{1}{6}(n-1)(n)(2n-1) < V < \frac{\pi r^2 h}{n^3}\cdot\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1) \text{，}$$

$$\frac{\pi r^2 h}{6}\cdot(1-\frac{1}{n})\cdot 1\cdot(2-\frac{1}{n}) < V < \frac{\pi r^2 h}{6}\cdot 1\cdot(1+\frac{1}{n})(2+\frac{1}{n}) \text{。}$$

因此，當 $n\to\infty$，不等式左右兩邊均逼近 $\frac{\pi r^2 h}{6}\cdot 2 = \frac{\pi r^2 h}{3}$。

所以，利用夾逼原理（Squeeze theorem），得出 $V = \frac{\pi r^2 h}{3}$。

3. 球體體積

在初中階段，球體體積的推導過程基本上不太可能證給學生看。當然，值得一提的是一個例子是祖沖之父子的貢獻。其中，實際上利用了祖暅原理——“冪勢既同，則積不容異”，即如果兩個立體的橫截面面積相等，則可利用一個立體的體積去計算另一個未知立體的體積。意大利數學家卡瓦列利（Bonaventura Cavalieri, 1598-1647）得到同一結論，但比祖暅

晚一千一百多年。用這個方法不難得出球體體積的公式，如圖 4-31 所示。

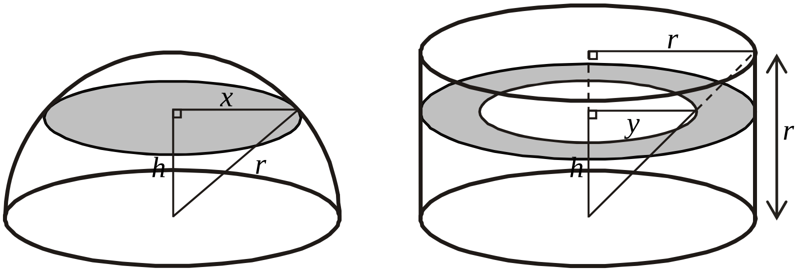


圖 4-31　左右灰色部分面積相等，故
半球體體積 = 圓柱體體積 − 圓錐體體積

五、表面面積

綜上所述，得到幾何體的表面面積更無法不借助微積分計算了。其中，比較典型的兩個表面面積公式爲：

$$\text{圓錐體曲面面積} = \pi\times(\text{斜高})\times(\text{底部圓形半徑}),$$

$$\text{圓球體表面面積} = 4\pi\times(\text{半徑})^3。$$

這裏我們提及一下，阿基米德（Archimedes）在其著作《論球和圓柱》（*On the Sphere and Cylinder*）一書中，指出了許多體積之間和面積之間的比例關係。其中有，“球的表面面積等於最大圓周面積的 4 倍”以及“圓柱表面面積（包括底面）= $\dfrac{3}{2}$ × 球體表面面積”。

六、角度

在《原本》中，歐幾里得是這樣給出角的定義："平面角是在一平面內但不在一條直線上的兩條相交結相互的傾斜角"。因此，"角"可指角這個形狀本身，也可指其形狀大小。這種情況其實是比較常見的，例如，方程 $x+y=1$ 並不是直線，我們只能說集 $\{(x,y)\in R^2, x+y=1\}$ 在坐標平面上形成一條直線。故此，便有了"直角不等於 $90°$"這樣的討論。

一般來說，在不會有甚麼混淆的情況下，就不必拘泥定義了。就如同爭論圓是指圓周還是包括內部，亦是不必要的。總之，只要向大家說明，在我們談一個概念時具體所指爲何就可以了。

角度在線性空間的"內積"中，也有更多討論[1] ，在此不贅。

七、維度

【**案例 4-1**】 有學生問"點沒有大小，爲甚麼由點構成的線具有長度？"

如上一章所說，其實《原本》十分審慎，並沒有說過由很多很多的點可以累積成線，而線中間有否縫隙，亦要到二十世紀初才基本解決。一般認爲，0 維是一點，沒有長度。一維是線，只有長度。二維是一個平面，是由長度和寬度（或曲線）形成面積。三維是二維加上高度形成"體積面"。

[1] Leung, K. T. (1974). *Linear algebra and geometry*. Hong Kong: Hong Kong University Press.

數學上也有一些“病態曲線”可充滿平面的曲線（space-filling curve）[2]。那麼，這條曲線是一維還是二維呢？若說整個空間，則較爲簡單，即考慮線性空間的維度。換言之，即考慮線性空間的基底的數量（即最多有多少個線性不相關的向量）。早期康托（Cantor, 1845-1918）嘗試用點的數量（無窮集的勢）去分辨 $[0, 1], [0, 1]^2, \ldots$ ，但當他證明了 $[0, 1] \sim [0, 1]^2 \sim \ldots \sim [0, 1]^n$ （等勢）時，他也驚嘆地說：“我證了，但我不能相信。”今天看來，就是用等勢不足來分辨維度。

第二節　國際單位制

國際單位制，又稱公制或米制，舊稱“萬國公制”，是一種十進制進位系統，是現時世上最普遍採用的標準度量衡單位系統。

一、國際單位制（SI）的起源

有中國內地教師到香港交流，發現香港的數學課不教分米（dm）。理論上，按照國際單位制的想法，長度單位應只有一個，就是 m，不僅統一了不同國家的單位（如呎、尺），也取消了 km、cm、mm 等，一切用科學記數法表達，如 $12\text{km} = 1.2 \times 10^4\text{m}$ 等。不過由於市面仍通行使用 km、cm 和 mm，教師教授這些單位主要在於實用價值，也只是一種權衡。

國際單位制的起源是在國與國之間以金錢、物品、信息及

[2] Vilenkin, N. Ya. (1968). *Stories about sets*. New York: Academic Press Inc. 李鐘蓀（譯）（1979）。《集的故事》。香港：商務印書館。

任何物品進行交換時必須有共通的單位以便操作。

1790 年，根據法國的外交官塔裏蘭的提議制定“公制法”（metric system）。他們以地球子午線長度的千萬分之一爲 1 米的標準長度，採取十進制計算，是一種非常客觀且合理的單位制度。此後在 1875 年，國際計量大會（CGPM）訂立公制條約，世界各主要國家都加入這項條約，國際單位系統逐漸走向統一。

公制法不僅包括長度、質量、面積，還納入了時間、電力、光强度、熱力等的計量。此後，以米（m）、千克（kg）、秒（s）爲基礎的 MKS 公制，以及後來加上電流安培（A）成爲 MKSA 公制；以厘米（cm）、克（g）、秒（s）爲基礎的 CGS 公制等，以及用於學術與産業界的各種公制法紛紛出現。

分類過多的公制法由於必須重新統一標準，因此在 1960 年的第 11 屆國際權度大會中，制定了國際單位制（International System of Units：SI）。其中，SI 來自法文的 le Système international d'unités）。

二、國際單位制（SI）的內容

國際單位制是由物理學家訂定的，由七個基本單位與組合成基本單位的導出單位，以及以 10 的倍數、分數表示、冠上 SI 名稱的單位所構成。

國際單位制基本單位						
長度	質量	時間	電流	熱力學溫度	物質的量	發光强度
m	kg	s	A	K	mol	cd

中國內地以“公尺”代表“m”，臺灣及香港地區則用“米”。“kg”在內地爲“公斤”，臺灣及香港地區用“千克”。

此外，國際單位制的導出單位有以下幾個例子：

面積	體積	速度	加速度
平方米（m^2）	立方米（m^3）	米每秒（m/s）	米每秒秒（m/s^2）

國際單位制的特徵有以下幾點：

（i）　基本單位是基於標準來定義。

（ii）基本單位加以組合，可以合理表示所有的計量。

（iii）以每個計量都能分割成一個單位爲原則。

（iv）量的大小接上 SI 名稱後可以整數表示。

【案例 4-2】　甚麼是“1 米”？

米是國際單位制基本的長度單位，符號爲 m。舊稱爲“米突”，簡稱爲“米”。中國內地和港澳地區主要使用“米”這種稱法，“公尺”較少使用；中國臺灣地區一般使用“公尺”，“米”則主要用在部分場合或某些用語中（如“百米賽跑”）。在 1791 年，即法國大革命後，法國科學院曾以環繞地球子午線長度的一千萬分之一（即 10^{-7}）定爲“1 米”。

由於後來發現地球不是正球體，地球自轉會引致子午線長度改變，故在 1927 年，“1 米”的定義改爲以鉑銥合金製成的國際米原器的標準長度[3]，如圖 4-32 所示。後來激光普及化，

---

[3] 國際米原器在 1889 年至 1960 年期間是米的標準定義，資料於 2009 年 8 月 16 日摘取自 http://zh.wikipedia.org/w/index.php?title=Metre&variant=zh-hk

圖 4-32 國際米原器

圖片來源：Mark Helfer / National Institute of Standards and Technology（National Institute of Standards and Technology 的網址為 www.nist.gov）

“米”的定義改爲以光波的波長倍數作標準。但由於不確定性原理的緣故，不太可能同時得出長度和時間的精確量度。所以在 1983 年，國際度量衡組織改以光速爲長度標準的定義，“1 米”被定義爲平面電磁波（光）在“1/299792458 秒”的持續時間內在真空中傳播的距離。

在單位的使用上，體積和容積是兩個容易混淆的量。體積（volume）表示對象占有多少空間的量。體積的國際單位制是立方米。一件固體對象的體積是一個數值用以形容該對象在三維空間所占有的空間。一維空間對象（如線）及二維空間對象（如正方形）在三維空間中均是零體積的。在數學上，體積是以積分的方式來定義的，即將某對象切割成大量的小正方體，把所有這些小立方體的體積加起來而求得的。

體積和容量（capacity）在有些時候是不同的。這種不同主要體現在含義、單位和測量方法上。容量是指某容器的承載量（用升來量度），一件物體的容積，是指該物體能裝多少液體，單位是升（L）或毫升（mL）；而體積則是指某對象排出的空間量（用立方米來量度），一件物體的體積，是指該物體

占多少空間，單位是立方米（m^3）。另外，求物體的體積是從該物體的外部來測量，諸如長、寬、高，而求容積卻是從物體的內部來測量。

例如，有一個杯子，它的體積指的是其使用材料的體積。而容積就只會考慮此杯的最大盛載量。多了便會溢出，無法盛載。未溢出即表示還未到其最大盛載量，此杯的容積必大於此時的盛載量。

再例如，若兩塊大小相等、重量相等的手工泥用於製作盛器，無論兩者的外貌如何，其體積必爲相同。因爲用料（手工泥的大小及重量）相等。但若用來盛載液體，可能差別很大，這就是容積了。若不能盛載，即容積爲零（可能外形扁平或缺乏盛載空間的結構），這樣其盛載空間便有大小之分，即盛載空間結構越能存多一些液體，容積越大，然而體積卻相同。

三、單位的冪

既然面積與體積的基本單位是 m^2 及 m^3，那麼單位是否可進行四則運算呢？

【案例 4-3】　可否寫“m^2/m”或“$m \times m = m^2$”？

分析：平方米（m^2）是否等於 $m \times m$？嚴格來說，“$m \times m$”是不存在的。因爲乘法只是針對數字的運算，即所謂 x：$\mathbf{R} \to \mathbf{R}$，而“m”不是 $\mathbf{R}$ 的一元，故“沒有資格”進行乘法。

不過這又涉及到另一個有趣的問題，爲甚麼 $1m^2 = 1m \times 1m$ 呢？即對於邊長爲 1 m 的正方形，爲何面積必須爲 1 m^2？這當然是“人爲”的定義問題，也可以說是極自然之事。但當“天

地初開”，當“世界”上只有長度、只有 m 而仍沒有面積、仍沒有 m^2 這個單位時，爲何我們不可以定義基本單位爲 4α 呢？（姑且勿論 α 與 m^2 有何關係）。換言之，我們爲何不能定義 $1m \times 1m = 4\alpha$，亦即把單位面積 α 定義成 $\frac{1}{2}m \times \frac{1}{2}m$，如圖 4-33 所示呢？

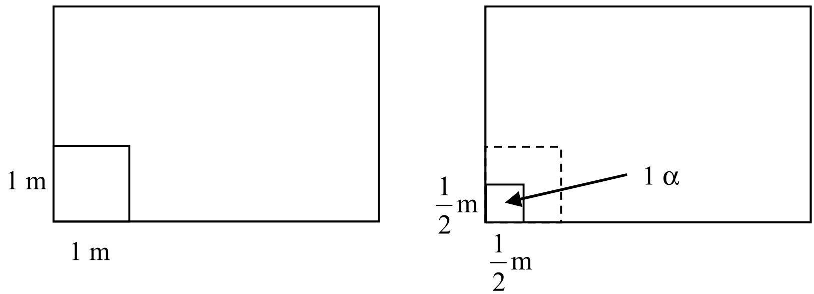


圖 4-33 單位面積的定義

這當然不是自然的做法，最自然的還是“$1m\times1m=1m^2$”或“$a\,m\times b\,m=ab\,m^2$”。不過，如果非要用數學去重組，又可如何操作呢？

首先，我們必須意識到，測量其實是數學對現實世界的建模。從某種意義來說，“m”等不是數學概念。既然如此，我們可以定義一個“單位集”：

$$M = \{ m, m^2, m^3, \ldots \}$$

甚至我們可簡化爲 $\mathbf{Z}^+ = \{1, 2, 3, \ldots\}$，然後定義一個新的運算⊗：$(\mathbf{Z}^+ \times \mathbf{Z}^+)^2 \to \mathbf{Z}^+ \times \mathbf{Z}^+$，$(x, m) \otimes (y, n) = (xy, m+n)$。當然這些均是一些費時失事、沒有必要的動作，我們只是想說明“$m\times m=m^2$”雖然沒有數學上的必然性，但其實也是可以解釋的。

四、角度的單位

在中學階段，角度通常用以下兩種方法表示：

i) 把圓周分爲 360 等份，每條弧所對應的圓心角定義爲 $1°$，故一周角爲 $360°$。

ii) 令角度爲 $1°$ 的弧長正好是圓的半徑，如圖 4-34(a) 所示，那麼，$1°$ 等於 $\frac{\pi}{180}$ 弧度。若以單位圓來說，角度爲 x 弧度的弧長便爲 x，如圖 4-34(b) 所示。

至於爲何要將一周角看成是 $360°$，詳細討論可參考梁宗巨（2001），頁 54-57。

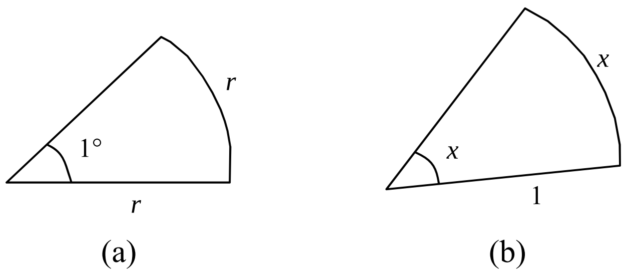


圖 4-34 度與弧度

第三節　測量誤差

一、誤差

誤差（errors）是實驗科學術語，指測量結果偏離真實值的程度。對任何一個物理量進行的測量都不可能得出一個絕對

準確的數值，即用測量技術所能達到的最完善的方法，測出的數值也和真實值存在差異，這種測量值和真實值的差異稱爲誤差。誤差的形式也有不同，比如，我們知道確切數字，但不想太精細（如月薪大概是一萬元）；有時，理論上有確切數字，但實際上又無法說準（如這一秒的全球人口）；再就是測量上誤差（因無法有絕對精細刻度，如高度），另外還有的誤差是由於人爲的錯誤產生。

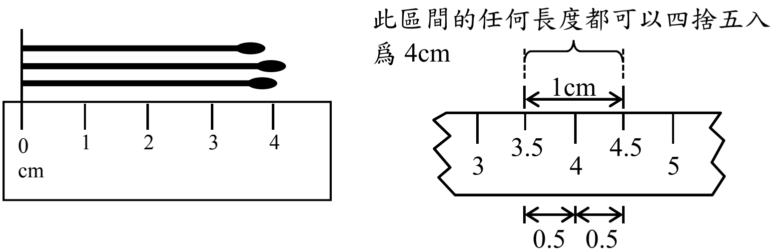
在測量中，誤差可分爲絕對誤差和相對誤差兩種。絕對誤差是測量值對真實值偏離的絕對大小，因此它的單位與測量值的單位相同；相對誤差則是絕對誤差與真實值的比值，因此它沒有單位的，而我們亦常以百分數來表達相對誤差。

一般來說，相對誤差更能反映測量的可信程度。相對誤差等於測量值減去真實值的差的絕對值除以真實值，通常再乘以百分之一百，以百分數表示。例如，測量者用同一把尺子測量長度爲 1 厘米和 10 厘米的物體，它們的測量值的絕對誤差顯然是相同的，但是相對誤差前者比後者大了一個數量級，表明後者測量值更爲可信。

誤差的來源可以分爲系統誤差和隨機誤差。系統誤差是由一些固有的因素（如測量方法的缺陷）產生的，理論上總是可以通過一定的手段來消除。如天平的兩臂應是等長的，可實際上是不可能完全相等的；天平配置的相同質量的砝碼應是一樣的，可實際上它們不可能達到一樣。隨機誤差，顧名思義，它是隨機產生的、不可預計的，它服從統計學上所謂的“正態分布”或稱“高斯分布”，它是不可消除的。在這個意義上，測量對象的真實值是永遠不可知的，我們只能通過多次測量獲得的平均值儘量逼近。

在現實世界中，測量是很難得到對象的真實值的，因此也無法計算絕對誤差，儘管如此，測量值的可能誤差最大也只是量度器具的刻度的一半，我們通常把最大的可能誤差稱爲最大絕對誤差。因此，測量真實值的範圍 ＝ 量度值 ± 最大絕對誤差，從以下例子可加深理解。

在圖 4-35(a)中，利用一把以 1cm 爲一刻度的直尺，測量三根火柴的長度，得出結果均是 4cm。



(a)　　　　(b)

圖 4-35 測量火柴長度

當量得火柴的長度是 4cm （準確至最接近的整數）時，火柴的真實長度是在 3.5cm 至 4.5cm 之間，可用 （4 ± 0.5）cm 來表示，如圖 4-35(b) 所示。但是，在測量的過程中，由於無法得到火柴的真實長度，因此也無法計算絕對誤差，儘管如此，測量值的可能誤差最大也只是 0.5cm（$=\dfrac{1\text{ cm}}{2}$），亦即爲最大絕對誤差。4.5 cm 和 3.5 cm 分別爲火柴的真實長度的上限和下限。若利用不等式表達，則有 3.5cm ≤ 火柴真實長度 ＜ 4.5cm。

【案例 4-4】 “有效數字”和“最大絕對誤差”的疑惑。

看下面兩道數學教科書上的問題

1） 若已知一元硬幣的直徑是 2.16 cm （準確至 3 位有效數字）。求最大絕對誤差。（教科書的答案：最大絕對誤差 ＝ $1/2 \times 0.01$ cm = 0.005 cm）

2）已知線段 AC 的長度是 4.8 cm（準確至小數點後一個位）。求線段 AC 的上限。（教科書的答案：最大絕對誤差 ＝4.8 + $1/2 \times 0.1$ cm = 4.85 cm）

對此，我們不禁要問：是否能從“準確至 3 位有效數字”或“準確至小數點後一個位”這些字句推論到測量工具的最小刻度或測量時的最大絕對誤差？另外，如果用圖 4-36 的“直尺 A”和“直尺 B”測量一物件，都得出 3.8 cm。我們能否說：物體的長度是 3.8 cm （準確至兩位有效數字）？如果可以的話，那麼當我們說“某物體測量的長度是 3.8 cm（準確至兩位有效數字）”，從這句話能知道該測量對象長度的上限嗎？

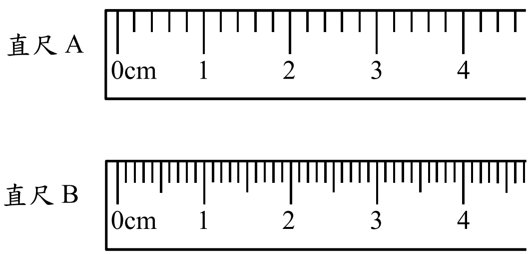


圖 4-36 有效數字與絕對誤差

其實若用直尺 A 和 B 測量，得出該物體的長度是“3.8cm（準確至兩位有效數字）”，這個寫法在數學上並沒有錯誤，

只是對應直尺 A，爲了能更準確理解直尺的準確度，我們應更清晰地將測量結果寫成“3.8cm（準確至最接近的 0.2cm）”。由此可知，直尺 A 的最大絕對誤差爲 0.1cm。因此，若我們只知測量後的結果是準確至某個有效數字，從測量的數字上是不能知道該量度的最大絕對誤差或量度工具的上、下限精確度的，但在沒有任何提示或其他數據下，我們通常都假設量度工具是以十進制形式展示其每個刻度。

二、誤差的處理

對於誤差的處理方式，一般我們採用“四捨五入”（round off）的方法。這裏我們再介紹兩種方法：

1）上舍入法（round up）

當需要一個較大的估計值時，無論在指定所取準確值的位之後的那位數字是多少，都要進 1 至所取準確值的位。

2）下舍入法（round down）

當需要一個較小的估計值時，在指定所取準確值的位之後，把所有數字全部舍去。

爲比較它們的不同，我們可以看下面的例子：

【案例 4-5】 小明由一月份至五月份分別存入現金 368.5 元、221.3 元、338.6 元、395.7 元和 277.4 元到銀行。

(a) 若小明的存款高於 1700 元，可獲特別利息獎勵。問小明現有的存款總額能得到利息獎勵嗎？

解： 將小明每月存入的現金上舍入至最接近的十位，故此

小明的銀行存款

$\leq 370 + 230 + 340 + 400 + 280$

$= 1620$ 元

< 1700 元。

若用上舍入法作估算，能快速地知道總數大概的數值，是否比 1700 元多或少。

因爲小明的銀行存款上舍入後仍低於 1700 元，所以小明不能獲得特別利息獎勵。

(b) 估計小明銀行的存款足夠買一個價值 1300 元的電子辭典嗎？

解：將小明每月存入的現金下舍入至最接近的百位，故此

小明的銀行存款

$\geq 300 + 200 + 300 + 300 + 200$

$= 1300$ 元

因爲是比較數值，所以用下舍入法能知道是否比 1300 元多就足夠，雖然估值或許會與真實值的距離較遠一點，但也影響不大。

因爲小明的銀行存款下舍入之後仍然比電子辭典的價錢高，所以他的銀行存款足夠買價值 1300 元的電子辭典。

下舍入後的數值會比真實值少，所以若下舍入後仍然比 1300 元多，表示真實值會多出更多。

以上兩個問題都是需要估算小明的銀行存款，但因爲需要的結果不同，所需的策略也不同。對此，只要能言之成理，即使估值不相同，答案也是合理的。

三、誤差的運算

當我們計算長方形面積時，長和寬都是測量得出的，這樣就出現兩個誤差。面積的誤差就變成了“誤差的積”。以下是一些有關誤差運算的規律：

我們將物體 X 和 Y 的誤差定義爲 E_X 和 E_Y，則有

1）加法和減法運算

$X \pm Y$ 的誤差值爲： $X \pm Y + (E_X \pm E_Y)$；

而相對誤差爲：$\dfrac{E_X \pm E_Y}{X \pm Y}$ ；

這其實是因爲絕對誤差爲：

$$[\,X \pm Y + (\,E_X \pm E_Y\,)\,] - [\,X \pm Y\,] = E_X \pm E_Y；$$

其相對誤差就變成：$\dfrac{E_X \pm E_Y}{X \pm Y}$ 。

2）乘法運算

XY 的誤差值爲：$(X + E_X)(\mathrm{Y} + E_Y) = XY + X\,E_Y + Y\,E_X + E_X\,E_Y$；

而相對誤差爲：$\dfrac{E_X}{X} + \dfrac{E_Y}{Y}$ ；

同理，絕對誤差爲：$X\,E_Y + Y\,E_X + E_X\,E_Y$ ；

相對誤差本應爲：$\dfrac{E_X}{X} + \dfrac{E_Y}{Y} + \dfrac{E_X\,E_Y}{XY}$ 。

但由於 $E_X\,E_Y$ 很小，XY 很大，一般會排除掉 $\dfrac{E_X E_Y}{XY}$ ，故只剩下

$\dfrac{E_X}{X}+\dfrac{E_Y}{Y}$ 。

3）除法運算

$\dfrac{X}{Y}$ 的誤差值爲：$\dfrac{(X+E_X)}{(Y+E_Y)}$ ；

而相對誤差爲：$\dfrac{\dfrac{X+E_X}{Y+E_Y}}{\dfrac{X}{Y}}-1=\dfrac{1+\dfrac{E_X}{X}}{1+\dfrac{E_Y}{Y}}-1$

$$=\frac{1+\dfrac{E_X}{X}-1-\dfrac{E_Y}{Y}}{1+\dfrac{E_Y}{Y}}$$

$$=\frac{\dfrac{E_X}{X}-\dfrac{E_Y}{Y}}{1+\dfrac{E_Y}{Y}}\approx\frac{E_X}{X}-\frac{E_Y}{Y}$$ 。

4）冪（$n\in\mathbf{Z}^+$）

X^n 誤差值爲：$(X+E_X)^n$ ；

絕對誤差爲：$(X+E_X)^n-X^n=X^n\left[(1+\dfrac{E_X}{X})^n-1\right]$ ；

相對誤差爲：

$$(1+\frac{E_X}{X})^n-1=n(\frac{E_X}{X})+\frac{n(n-1)}{2!}(\frac{E_X}{X})^2+\ldots\approx n(\frac{E_X}{X})$$ 。

第五章　統計與概率

我們在一生中的每一天，都必須處理名目繁多的各種事務，也都需要審視周圍的環境、預料多種可能性，並能在瞬間接受、整合和處理一系列的感官信息，繼而做出準確的判斷，然後再採取恰當的措施去處理問題。也就是說，每個人每天都進行着成千上萬次的評估分析與選擇決策，這些都離不開統計。本章從統計數據、統計工具、統計推斷、統計意識等四個角度，介紹了中小學統計教與學的基礎知識，尤其强調統計與社會和生活的緊密聯繫，强調統計的應用價值。

在統計方面，我們首先介紹數據的處理和展示：不同統計圖的本質；集中量及差異量這兩種統計量的本質；接着介紹統計的誤用，這只簡單介紹收集數據與統計圖展示的一些誤用；最後討論統計推斷和統計意識，它們可以有更複雜的方法，如假設測試等。但本章會集中於中小學範圍。在概率方面，除了其本身意義和古典概率外，本章亦介紹幾何概率。

一般我們會把統計與概率合在一起，但似乎兩者又不相干。從實驗概率的角度我們會巧妙地看到兩者間的關係。統計與概率所涉及的數學內涵，也在此一一地探討了。

第一節　統計

一、統計數據

數據有不同的類型，在小學或初中階段，如何向學生解釋數據是離散的或連續的呢？在一個特定範圍（例如，家庭人數

的取值範圍爲 2 ~ 6 人）內，如果存在一些數據其意義不合理（例如，家庭人數爲 2.5 個），我們是否就能說，在這一特定範圍內具有特定意義的數據(例如，家庭的人數)是離散的呢？這樣的表達是否會有不足呢？還有沒有一些較爲淺白和易明的方法去解釋呢？

其實，數據的離散或連續與否從某個角度來說很難斷定。例如時間、長度……一般算作連續量，但其實中間涉及一個“中介”測量。又例如學生的身高，理論上可無限精細地准，但所使用的測量尺始終有刻度，時間也是這樣。所以，有時收集到的連續數據事實上是諸如 121, 143, 170, … 等整數數據——離散量。

在某種意義上說，統計（涉及了數據的收集）也是一種對現實世界的建模。倘若你用連續模型去建模，就是連續量，用離散模型去建模就是離散量。另外，若將數個離散量集合而成的量，或一個連續範圍內表示的量，亦可稱爲“分組量”（grouped data）。

1. 數據的分類

簡單來講，統計是對收集到的數據進行分析和推斷。因此，統計研究的基礎是數據，甚至有人說：數據是統計的生命！具體來說，統計中的數據是指用來表示所收集的觀察結果的數字或測量值。

由於數據有不同的特點和種類，需要採用不同的數據處理和轉換的方法。因此，對數據進行處理前，必須先瞭解數據的特點和種類。根據不同的標準可以將數據分爲以下不同的種

類：

(1) 按照來源分類

按照數據的來源，可以將數據分爲點計數據和度量數據。

點計數據是指計算個數所獲得的資料。如學校數、班級數、學生數、教師數、教學儀器數等。

度量數據是指用一定的工具或一定的標準測量所獲得的數據。例如，用體重秤測得學生的體重，用時鐘測得學生完成某項作業所用時間，用單元測驗獲得學生該單元知識技能掌握的情況等。

(2) 按照取值特徵分類

按照數據的取值特徵，可以將數據分爲離散型數據和連續型數據。

離散型數據的取值是間斷的，數據單位獨立，兩個單位之間不能再劃分成細小的單位，數據一般用整數表示。例如，學校的男生人數、女生人數；體育測驗獲得優、良、中、差各個等級的人數等。

連續型數據的取值可以看成來自實數集合，它們可能的取值範圍能連續充滿實數集的某一個區間，數據的單位之間可以再劃分成無限多個細小的單位，即數據可以用小數表示。例如，學生的身高、體重、智商、測驗成績等，都屬於連續型數據。

選擇用連續數據，還是用離散數據來表示研究的對象，既要看對象的特徵，還要看解決問題的需要。

(3) 按照量度數據所用的測量量表分類

按照量度數據所用的測量量表等級，可以將數據分爲定類數據、定序數據、定距數據和定比數據。

定類數據是指用定類量表測量表示的數據，用以表示研究對象所屬的類別，沒有順序性、等距性和可加性，不能對數據進行大小比較，更不能對數據進行加、減、乘或除運算。例如，男生用“1”表示，女生用“2”表示，這裏的“1”和“2”既無大小之別，也不能參與加、減、乘或除運算。

定序數據是指用定序量表測量表示的資料，表示按大小、輕重、等第等特徵依次排列的測量屬性，這類數據具有順序性，但不具備等距性與可加性，可以進行大小比較，但是不能參與加、減、乘或除運算。例如，學生測驗成績劃分爲優、良、中和差四個等級，分別用 1、2、3 和 4 表示，這些數據具有大小順序，具有傳遞性，但不能參與加、減、乘或除運算。

定距數據是指用定距量表測量表示的數據，表示測量遵循統一的單位，相等的點與點之間的距離也是相等的，即測量特徵具有順序性和等距性，可以進行大小比較，也可以參加加減運算，但是不能參與乘除運算（因爲定距變量沒有絕對零點，例如，測驗得 0 分不表示該考生相應的能力也爲 0）。

定比數據是指用定比量表測量表示的數據，除含有定距數據的特徵之外，還有絕對的零點（即表示被測量的屬性完全沒有），因此，可以進行加、減、乘和除四則運算。

一般的物理測量中所獲得的數據大都是定距數據和定比數據，而教育測量中獲得的資料以定序數據、定距數據居多。

2. 數據的特徵

與代數中的數值相比，統計數據具有三個明顯的特徵：
（1）數據有明確的現實背景，有具體的含義；
（2）單個數據具有不確定性；
（3）大量數據中蘊含着一定的規律。

統計所關注的是數據在分布中與其他相關數據之間的關係。因此，我們需要抽取一定數量的數據，通過歸納整理和分析判斷，才能發現隱藏在數據中的規律性，從中獲取有效和有用的信息。

3. 數據的整理

在整理統計數據時，根據數據的特點，有不同的處理方法。例如，如果數據屬於離散型的，那麼利用圖表將數據分類統計，就可以得到頻數等基本統計量，如表 5-1 是某班 58 名學生某次單元測驗成績，整理後，如圖 5-1 所示；然後進一步用統計圖（組織圖、折線圖、頻數曲線圖、累積頻數曲線圖等）進行加工，就可以揭示數據中可能蘊含的規律，如圖 5-2 所示。

表 5-1　某班 58 名學生某次單元測驗成績

76	90	78	77	74	68	60	74	68	94
66	84	81	85	54	91	62	65	75	79
80	93	55	89	76	78	81	80	76	52
75	76	68	80	75	55	87	72	68	57
69	93	57	84	76	69	78	87	37	60
85	76	62	76	48	90	91	73		

分組	劃記	頻數
0-9		0
10-19		0
20-29		0
30-39	一	1
40-49	一	1
50-59	正一	6
60-69	正正丅	12
70-79	正正正𠄟	19
80-89	正正丅	12
90-99	正丅	7
總數		58

圖5-1 頻數統計

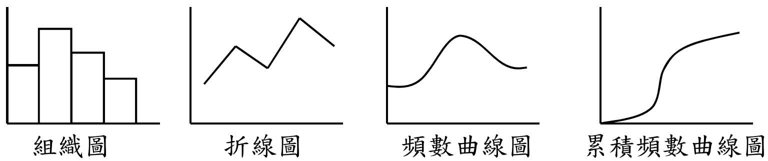


圖 5-2 各種統計圖

在對數據進行了初步整理後，往往會對數據做進一步的加工。通常有兩種思路：一是研究數據的集中情況，通常用集中統計量表示；二是研究數據的波動情況，通常用差異統計量表示。

二、統計數據展示

收集到數據後，就需要對數據進行組織與整理，這就需要用到一系列的統計工具。圖形和表格是數據整理與分析中不可

缺少的部分，它們說明人們怎樣依據研究目的與研究內容組織、總結和解釋數據。當使用圖表時，數據更容易理解和解釋，也更容易讓人記住。

不同的數據類型會使用不同的統計圖來表示。統計圖之間也絕非不能互換，關鍵要看使用的目的是甚麼。例如，離散數據，可以用條形圖、象形圖等表示，也可以用餅圖來表示。連續量（含分組量）則通常用組織圖、折線圖等來描述。下面分別介紹常見的統計圖與統計表。

1. 常見統計圖

任何數據的組織與整理的第一步都是從數據的排序開始的。整理數據時，需要借助一些有效的方法對數據進行分組、排序與對比。

（1）條形圖（又稱棒形圖）

條形圖是用闊度相同的長條表示各個統計對象之間的數量關係，它在數據分析中經常用到。它具有以下三個獨特的特徵：

（i）橫軸表示的是定類資料或定序數據。當數據代表的是不同類別或者不同等級的情況時，就使用條形圖。

（ii）長條與長條之間是間斷的。由於橫軸表示的是定類數據或定序數據，因此一個長條代表一個類別，表明這些類別是離散的。

（iii）縱軸可以表示頻數、百分數或其他描述性統計量。

（2）象形圖

它其實只是條形圖的“變種”。除了用圖形表示外，一般每個圖代表一定數量的頻數，如圖 5-3 所示。

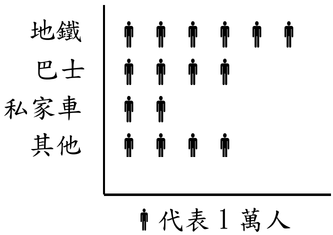


圖 5-3 象形圖：每天乘搭不同交通工具人數

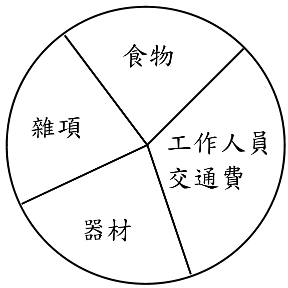


圖 5-4 圓形圖：聚會開支

（3）圓形圖

它是離散數據的表示法。頻數與圓心角成正比。更確切地，每一塊的圓心角 $=$ (頻數 $\div$ 總頻數) $\times 360^\circ$，其表示重點不在於確切的頻數，而在於每一塊相對的比重，如圖 5-4 所示。

（4）組織圖（或稱直方圖）

組織圖與條形圖（如圖 5-5）的最主要的區別有兩點：

（i） 橫軸表示的數據類型不同。組織圖的橫軸表示的數據屬於定距數據或定比數據，數據代表的分數呈現出由左向右、從低值到高值的連續變化。

（ii） 長條呈現形式有別。組織圖也用長條表示數據，每個長條代表一個類區間，類區間就是有確定上限與下限的數

值取值範圍。由於組織圖的橫軸代表的是連續變量，因此，長條與長條間沒有縫隙。

除了頻數分布組織圖外，常見的還有頻率分布組織圖，即從各個小組數據在樣本容量中所占比例大小的角度，來表示數據的分布規律。

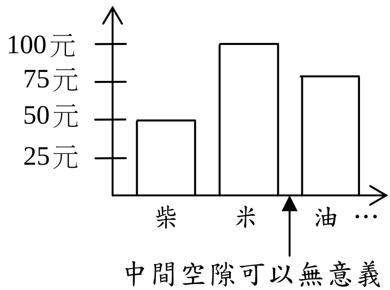


圖 5-5 條形圖：每月支出

在繪畫時，我們需要把每組擴大半個單位，以圖 5-1 爲例，即變成了圖 5-6。它與條形圖不同，因 x 軸已隱含着連續量，故柱與柱之間沒有間隙。

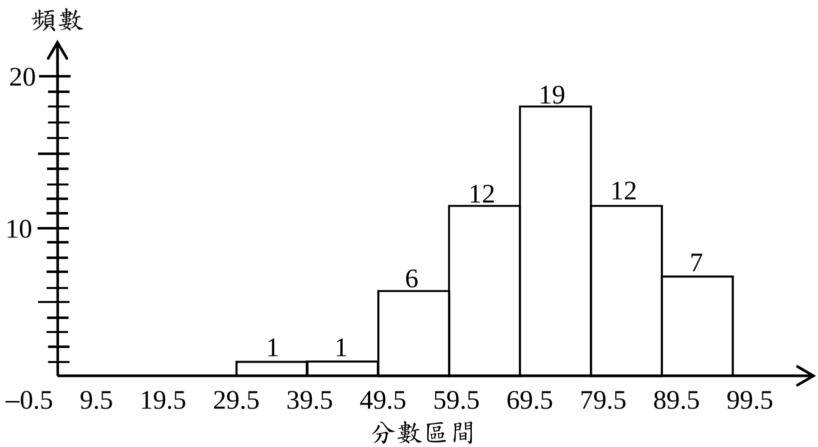


圖 5-6 組織圖

對此也許不少人有爭論，因爲這麼一來，就有一些超越常理的數據。如“–0.5 分”甚麼意思？。首先，這並沒有錯。假若在擴張前 0 ~ 9 分共有 n 人，–0.5 ~ 9.5 分有 n 人仍然是成立的，而統計圖（及統計本身）往往只希望瞭解一些一致的規律和趨勢，而不必太關心個別的數據。另外，雖然我們在繪畫組織圖時，各區間的闊度是一樣，但是這並非是必須的。在整個研究區間分割時，區間是可取不同的闊度。

（5）頻數多邊形（或頻數折線圖）

把組織圖各柱的中點連起來就是頻數多邊形，如圖 5-7 所示。

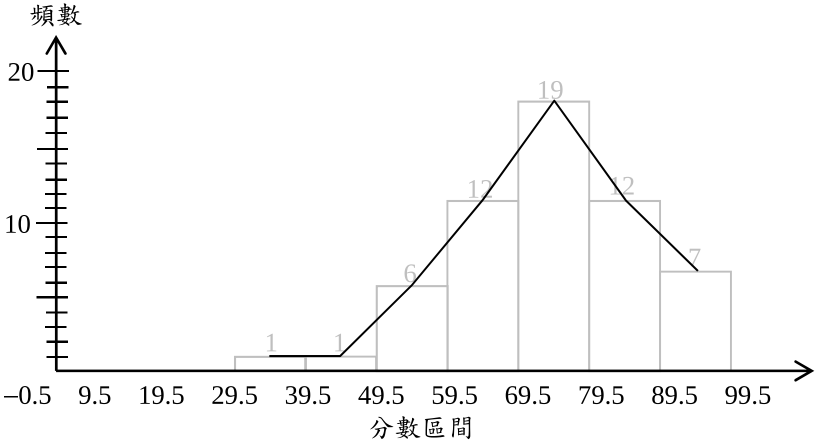


圖 5-7 頻數多邊形

（6）幹葉圖（或稱莖葉圖）

幹葉圖是一種非常有效的探索數據分布狀況的數據分析方法。如圖 5-8 所示，把表 5-1 中的數據利用幹葉圖表示出來。豎線左邊的數據表示幹，代表每個數據十位上的數字；豎線右

邊的數據表示葉，代表每個數據個位上的數字。最右邊一列的數字表示包含在這一組中的數據個數。

幹（10 分）	葉（1 分）	
9	0011334	7
8	000114455779	12
7	2344555666666667889	19
6	002256888899	12
5	245577	6
4	8	1
3	7	1

N=58

圖 5-8 表 5-1 數據的幹葉圖

它的好處是既有組織圖的展示，亦能看到每一個數據。

（7）框線圖（或稱箱形圖）

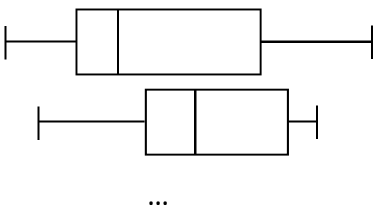


圖5-9 框線圖

如圖 5-10 所示，每一組數據圖標如下。它的好處是同一圖裏包含了幾個主要的統計量。

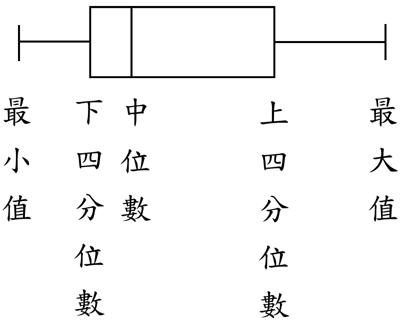


圖5-10 框線圖

三、統計量

1. 集中統計量

在總結、描述數據的集中情況或頻繁出現情況時，常用的統計量有：平均數，中位數和衆數。

平均數是最常用的一個統計量，用公式表示爲

$$\overline{x}=\frac{x_1+x_2+\ldots+x_n}{n}=\frac{1}{n}\sum_{r=1}^{n}x_r \quad ,$$

其中，$\overline{x}$ 表示算術平均數，x_r 表示每個數據的數值，n 表示數值的個數。

中位數就是將一組數據分爲兩半的數值，有一半的數值大於中位數，有一半的數值小於中位數，即中位數是 50%的百分位點。

把一組數據按照由小到大或由大到小的順序排列，設這組

資料的個數是 n，當 n 是奇數時，中位數的位置就是 $\frac{n+1}{2}$，即第 $\frac{n+1}{2}$ 個數是這組數據的中位數；當 n 是偶數時，中位數的位置就是 $\frac{n}{2}$ 和 $\frac{n}{2}+1$，一般取第 $\frac{n}{2}$ 個和第 $\frac{n}{2}+1$ 個數據的平均數。

衆數就是一組數據中出現頻率最高的數值，它最容易得到，因爲它是觀察得出的，而不是計算得到的。

這三種統計量有各自的用途。衆數雖然對數據的描述顯得粗糙，但也不是不常用。例如，一群學生參加聚會，大部分人是 13 歲，這時用衆數描述學生的年齡情況最爲適宜。

平均數是最常用的集中統計量，在計算時需要用到收集到的每個數據。它可用公式計算（包括用計算機），雖然方便，但這也正是其弊病所在，就是它容易受某些極端的數據影響，導致它未能恰當代表整組數據。一個經典的例子就是，管理層的薪金會拉高整個公司員工的平均薪金水平，如圖 5-11 所示。

中位數雖然並不容易計算出來，但是在處理實際問題時亦不是不常用，例如，政府部門有時會公布薪金中位數供公衆參考，避免了平均數受極端數據影響的弊端。

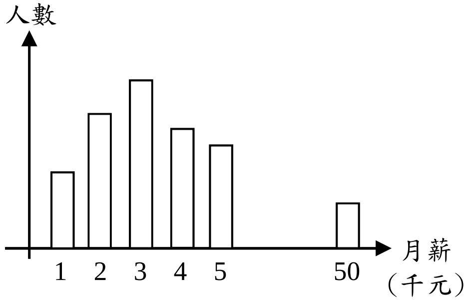


圖 5-11　極端數據

對於分組量而言，平均數則是 $\bar{x}=\dfrac{f_1x_1+f_2x_2+\ldots+f_nx_n}{f_1+f_2+\ldots+f_n}$

$=\dfrac{1}{N}\sum_{r=1}^{n}f_rx_r$，其中 $N=f_1+f_2+\ldots+f_n=\sum_{r=1}^{n}f_r$。

另外，對於分組數據，各種集中統計量的運算會稍有不同。在分組數據中，衆數一般會考慮衆數組，例如表 5-1 中，最多學生的衆數組是 70 ~ 79 分，不會再看確切的分數。至於中位數，一般會用以下的方法計算。

【案例 5-1】 下表記錄了候車時間。求候車時間的中位數。

時間（分鐘）	1	2	3	4	5	6	7
頻數	3	7	10	15	9	5	1

首先製作組織圖：

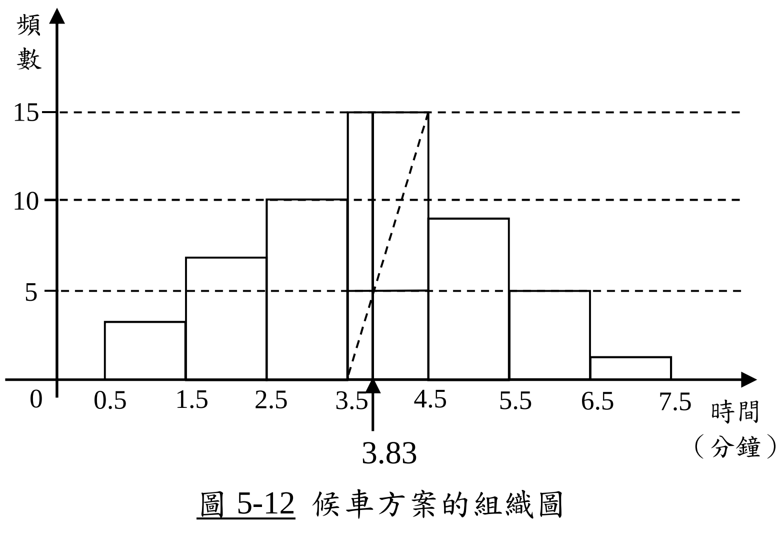
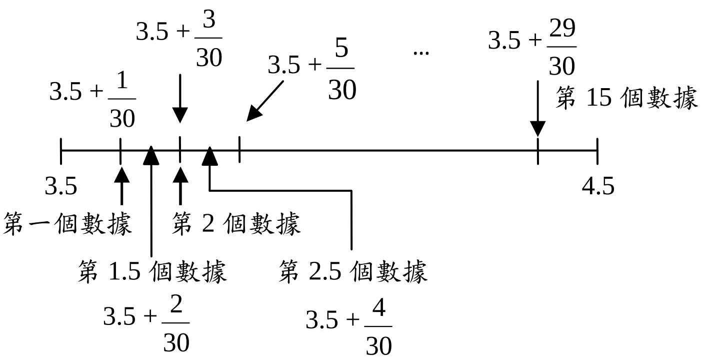


圖 5-12 候車方案的組織圖

數據總和爲 50，組織圖的前三條柱，已經算了 20 個數據，下一步是考慮第四條柱共 15 個數據。$50 \div 2$ 是 25，扣除前三條柱的 20，就是 5，在第四條柱中表示比例（這就是對角線劃分的作用）。將 $3.5 \sim 4.5$ 這個區間分作 15 份，並取當中的前 5 份，則得到中位數是 $3.5 + (4.5 - 3.5) \times \dfrac{5}{15} = 3.83$ 分鐘。

但是，爲甚麼前面明明說中位數是第 $(N + 1) \div 2$ 個數據，現又好像變成第 $N \div 2$ 個數據呢！其實我們仍是考慮第 25.5（$(N + 1) \div 2$）個數據。

在 $3.5 \sim 4.5$ 區間中有 15 個數據，假如我們假設這 15 個數據平均分布在 $3.5 \sim 4.5$ 區間。



它們便是 $3.5+\dfrac{1}{30}, 3.5+\dfrac{2}{30}, \ldots, 3.5+\dfrac{29}{30}$。第 25.5 個即爲 $3.5+\dfrac{10}{30}$（分鐘）。

因此，這個方法仍是計算第 $\dfrac{N+1}{2}$ 個數據的。對於一般情

況不難證得，只是較煩瑣。

群組	頻率
$a-(a+d)$	n_1
$(a+d)-(a+2d)$	n_2
…	…
$(a+(m-1)d)-(a+md)$	n_m

若中位數在［$a+pd,\ a+(p+1)d$］群組中出現，則有

$$\sum_{r=1}^{p} n_r \le \frac{N}{2} < \sum_{r=1}^{p+1} n_r \text{，其中 } N = \sum_{r=1}^{m} n_r \text{。}$$

設 $k=\dfrac{N}{2}-\sum_{r=1}^{p} n_r$，以慣常的做法，中位數爲

$$a+pd+\frac{kd}{n_{p+1}} \text{。}$$

若我們假設［$a+pd,\ a+(p+1)d$］群組中的 n_{p+1} 個數據平均分布，它們便是：

$$a+pd+\frac{1}{2}\cdot\frac{d}{n_{p+1}},\ a+pd+\frac{3}{2}\cdot\frac{d}{n_{p+1}},\ \dots \text{，}$$

第 r 個數據爲 $a+pd+\dfrac{(2r-1)d}{2n_{p+1}}$。而中位數應爲 $a+pd$ 數下去的第 $(k+\frac{1}{2})$ 個數據，即爲

$$a+pd+\frac{\left[2\left(k+\frac{1}{2}\right)-1\right]d}{2n_{p+1}},$$

同上面的做法一致。

2. 差異統計量

描述數據間彼此差異的程度時，我們會使用差異統計量，它用來反映一組數據的變異性（variability）、散布或者離散程度。最常見的統計量有：極差，方差、標準差和四分位數間距。

極差（分布域）（range）是對數據之間的變異性最籠統的測量，即一組數據中最大值與最小值的差，它刻畫了數據的波動範圍。一般來說，極差的計算方法是：

$$r=h-l\ ,$$

其中，r 是極差，h 是數據分布中的最大值，l 是數據分布中的最小值。

方差（variance）和**標準差**（standard deviation）是比較常用的兩個統計量，它們表示的是一組數據與其平均值之間的離散程度。在初期，人們傾向用各數據與平均值的差距總和來衡量，即 $\sum_{r=1}^{n}\left|x_r-\overline{x}\right|$（用 $\sum_{r=1}^{n}(x_r-\overline{x})$ 是沒意思的，因爲 $\sum_{r=1}^{n}(x_r-\overline{x})$ 永遠等於 0）。那麼，這個總和越大表示數據越散開。由於以上結果又會受 n 所影響，故此除以 n，成爲 $\frac{1}{n}\sum_{r=1}^{n}\left|x_r-\overline{x}\right|$。

不過又因爲絕對值不好計算，故現時較適用的是方差

$=\dfrac{1}{n}\sum_{r=1}^{n}(x_r-\overline{x})^2$ 和標準差 $=\sqrt{\dfrac{1}{n}\sum_{r=1}^{n}(x_r-\overline{x})^2}$（對於樣本方差和標準差來說，選取的是 $\dfrac{1}{n-1}$，主要是無偏估計）。不難看出，標準差開方後即成爲了方差，其單位也隨之變成了平方單位。至於分組量，標準差自然是 $\sqrt{\dfrac{1}{N}\sum_{r=1}^{n}f_r(x_r-\overline{x})}$ 其中 $N=\sum_{r=1}^{n}f_r$ 。

四分位數間距（inter quartile range）是第 75 個百分位數與第 25 個百分位數的差。利用四分位數的原則，亦可引申到百分位數間距。

不同的差異統計量也有各自的適用範圍。極差和四分位數間距雖然粗糙，但不是不常用。例如，我們在計劃做某一訪談時，往往會根據訪談目標設定受訪者的年齡範圍，比如在 15 歲 ~ 20 歲間。四分位數則是中位數的“變種”，故其利弊也同中位數。標準差與方差雖然常用，也容易計算，但亦受極端數據影響。

在平均數的應用中，有時需要通過不同組別數據的平均情況，獲得總體的平均值，這時就涉及對加權平均數的理解。以數學角度定義，若有數據 $x_1,x_2,\ldots,x_n$，且每一數據分別對應一個權重 $w_1,w_2,\ldots,w_n$（w_i 表示 x_i 出現的次數或者在整體中所占的份額），則這些數據的加權平均數是

$$\overline{x}=\frac{\sum_{r=1}^{n}w_r\cdot x_r}{\sum_{r=1}^{n}w_r}\text{ 。}$$

【案例 5-2】 現希望瞭解某校對開展圍棋比賽活動的支持率，抽出甲和乙兩班進行調查。已知甲班 50 人，10 人贊同，支持

率爲$\frac{1}{5}$；乙班 45 人，15 人贊同，支持率爲$\frac{1}{3}$；那麼兩班的總體支持率是否爲$(\frac{1}{5}+\frac{1}{3})\div 2=\frac{4}{15}$？

分析：兩班的總支持率需要考慮樣本量的影響。因此，上述的計算是不合理的。總支持率應爲

$$\frac{1}{5}\times\frac{50}{50+45}+\frac{1}{3}\times\frac{45}{50+45}=\frac{1}{5}\times\frac{10}{19}+\frac{1}{3}\times\frac{9}{19}=\frac{5}{19}\text{。}$$

這就是加權平均，權爲樣本量的比例。其中甲班支持率“$\frac{1}{5}$”所對應的權值爲“$\frac{50}{50+45}$”，而乙班支持率“$\frac{1}{3}$”所對應的權值爲“$\frac{45}{50+45}$”。

當然也可以用$\frac{10+15}{50+45}=\frac{5}{19}$來計算，兩個計算都是合理的，因爲都考慮到了樣本量。但是第一種算法已經不需要樣本的具體數據了，因而更爲深刻。

若數據以累積頻數曲線圖表示，則可計算中位數，四分（計至百分位）位數、四分位數區間的近似值，如圖 5-13 所示。

3. 統計量的變換

容易證得，若將每個數據加上 k，平均值亦增加了 k，標準差不變。在實際用途方面，例如我們有一組數據 10001, 10003, 10012, 10009, … ，我們可索性先扣掉 10000（$k=-10000$），數據組就變成了 1, 3, 12, 9, … ，得出平均值後再加回 10000。在以往沒有計算器或計算機的情況下，計算上述數據組的平均

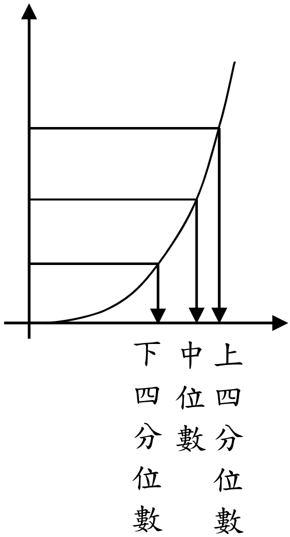


圖 5-13 中位數、四分位數區間

值就簡單得多了。這個 $-k$（即 10000）又名爲“工作平均值”（working mean）或虛擬平均值（fictitious mean）。加倍也有類似的情況。把數據加倍了 m 倍，平均值與標準差均加倍了 m 倍，就如同單位轉換，某重量單位數據組的平均數是 1.5kg，若把逐個數據轉換成用 g 作單位（m = 1000），自然地，平均值爲 1500g，標準差類推。

一般而言，若 $x_1, x_2, \ldots, x_n$ 的平均值爲 μ，標準差爲 σ，容易知道，$mx_1+k, mx_2+k, \ldots, mx_n+k$ 的平均值是 $m\mu+k$，標準差爲 $m\sigma$。

四、統計誤用

統計在收集數據、表示數據和詮釋等都可能有種種的誤用和誤導。上面關於圖表和統計量的討論已涉及一些誤用，例如

用條形圖表示連續數據，用扇形圖表示一些需要知道實質數量（而不只是比重）的數據。在有極端數據時，用平均數（而不考慮用中位數）都可算是一種誤用。這裏我們先簡單介紹了一些統計誤用的例子，再從另一角度分析誤用、誤導的實質。

1. 樣本選取不當

【案例 5-3】　某品牌牙膏在電視上宣傳其產品，聲稱“每 10 位牙醫中就有 7 位特別推薦該品牌牙膏”；某製藥廠在報紙上打廣告，聲稱該廠生產的治療肝病特效藥有效率高達 90%。

分析：案例中的兩個廣告具有代表性，主要的問題是沒有交代這個結論是依據怎樣的樣本做出的推斷。如果僅僅調查了某醫院 10 位牙醫對該品牌牙膏的看法，就做出上述結論，顯然不可信；即使是對大樣本做調查，如果抽樣方法存在偏頗，對總體的推斷也可能得出錯誤的結論。同樣地，製藥廠的治療肝病特效藥的藥效檢驗方法也需要交待清楚，如果只是將某藥品給 10 位肝病病人服下，有 9 位見效，就稱該藥品有效率達 90%，那麼這個廣告可以稱作是虛假廣告了。

2. 數據加權的方式不同

【案例 5-4】　某手機品牌在 A 地和 B 地各有一家生產基地，現對基地 A 和基地 B 的手機出廠質量進行檢核，結果如下：基地 A 共抽檢 400 個手機（其中，低檔 300 個，高檔 100 個），發現有 16 個手機質量不合格（其中，低檔 8 個，高檔 8 個）；基地 B 共抽檢 1000 個手機（其中，低檔 300 個，高檔 700 個），發現有 60 個手機質量不合格（其中，低檔 6 個，高檔 54 個）。於是，有一位質檢員得出結論：基地 A 的手機合格率爲 96%，

基地 B 的手機合格率爲 94%，基地 A 的手機生産質量更高。你認爲呢？

分析：如果換一種計算方法，就可以得出完全相反的結論。基地 A 的低檔手機合格率約爲 97.3%，高檔手機合格率爲 92%；基地B的低檔手機合格率爲98%，高檔手機合格率約爲92.3%。因此，無論是低檔手機，還是高檔手機，基地 B 的合格率都更高！

然而，案例中的質檢員的計算方法也沒有錯，不過他考慮的只是問題的表面現象。造成這種現象的原因在於，基地 A 生産低檔手機的數量所占的比例大，即權數大，由於權數的作用使得基地 A 的手機總合格率增大（即偏向 97.3%）；而基地 B 生産高檔手機的數量所占的比例大，即權數大，由於權數的作用使得基地 B 的手機合格率減小（即偏向 92.3%）。因此，權數對平均數的影響是至關重要的。

3. 數據呈現方式

【案例 5-5】 某報刊根據 1995 年三家巴士公司的營運數據，整理成下頁的統計表。

分析：在表中，A 公司車隊的平均車齡與班次失誤比率被刻意地加上記號，容易令讀者覺得衆多巴士公司的服務中以 A 公司最差，也會使讀者聯想到 A 公司的車齡高，故班次失誤比率自然高，但若仔細一想，兩者似乎沒有必然關係。

其次是 B 公司接獲的投訴數目最多，原因卻不一定是 B 公司的服務質素差，可能是 B 公司的車隊數目在三家公司中最龐大，故被投訴的機會也隨之而增加。

	A 公司*	B 公司	C 公司
車隊平均車齡*	13 年	8.1 年	5.6 年
班次失誤比率*	5.65%	4.90%	3.80%
巴士意外數目（以每百萬公里計算）	3.36 宗	3.61 宗	3.8 宗
交通投訴組 1995—1996 年度接獲的投訴數目	934 宗	1291 宗	434 宗
*A 公司居首位項目			

那麼，如實報數都是一種統計誤用嗎？當然不是這個意思，我們是希望學生在學習閱讀和分析數據時不要純粹地考慮數據的表徵而作草率的結論。又例如，生活中不少活動均會有意見調查，一些娛樂遊戲主辦者會請玩過的人進行評分，但這種取樣沒有問沒有去玩的人。而且還有一個可能是一些參加者因爲看到遊戲不好玩，根本不去玩，就更不要說收到他的評分了。

4. 調查問卷的引導性

【案例 5-6】　在一份調查問卷中，需要填答者填寫這樣一些信息：

1）
☐ 同意

☐ 不同意。請說明原因：＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿

在上述調查中，填答者可能會因不耐煩寫原因而傾向回答“同意”，導致收集的數據未能客觀反映填答者的真實想法。

2）

☐ 極同意	☐ 頗同意	☐ 同意	☐ 不同意

在上述四個選項中，同意的占三個選項，不同意的占一個選項，容易對填答者造成心理暗示，而且收集的數據可能產生偏差。

3）

請問這次講座中需改善的地方		
☐ 布置	☐ 講者衣着	☐ 燈光效果

該調查問題的選項設計有很大的局限性，例如，它沒有涉及講座的內容，但可能最大問題正是在於此。因此，收集到的數據可能缺少針對性，所得到的結論也會有失偏頗。

除了問題是否有引導性、被訪者是否會說真話及樣本是否足够大外，我們還可考慮：

1） 用甚麼方式進行調查？例如，若使用電話調查，那麼覆蓋面有多大？

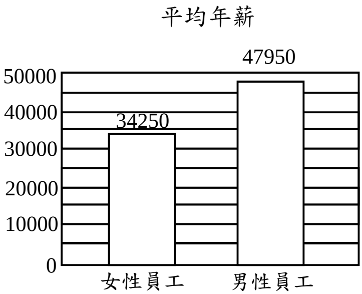
2） 如果採用街頭訪問，那麼會選擇在哪一社區進行? 訪問員是否會刻意回避某一類人（如貌似“凶神惡煞”者）？

3） 是否會有一類人總是拒絕受訪（如電話拒接或直接掛線）？

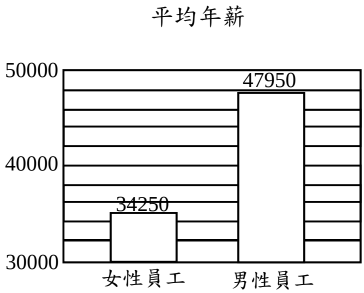
5. 統計圖誤用舉例

統計圖是經常使用的描述統計數據的方法，它生動、形象和簡明易懂，是大家瞭解統計和應用統計最直接的工具。但相當多的統計圖繪製得不規範和不標準，甚至誤用，造成誇大或低調處理數據的事實，從而成爲常見的一種統計誤用。尤其統計圖往往在電視媒體及街上廣告板等處出現。讀者無法長時間檢視細節，下面給出一例。

【案例 5-7】 某行業女性員工與男性員工的平均年薪情況如圖 5-14 (a)、5-14 (b) 所示，請分析兩種表達方式的差異。



(a)



(b)

圖 5-14 平均年薪

圖 5-14(a)是正確的描述，但圖 5-14 (b)給人的直觀印象爲男性員工的平均年薪是女性員工平均年薪的 2.5 倍左右，但比較實際數額不難求得男性員工的平均年薪只是女性員工平均年薪的 1.4 倍。造成這種錯覺的原因在於圖 5-14(b) 的坐標原點不是從零開始而是從 30000 元開始的。可見圖 5-14 (b)明顯誇大了兩性平均年薪的差異。

把條形圖的柱放在不同位置或用不同組合也可產生不同的視覺效果，如圖 5-15 和圖 5-16 所示。

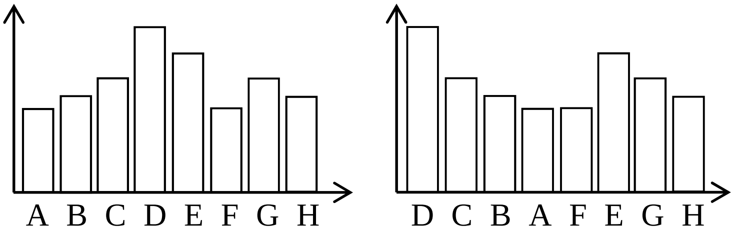


圖 5-15 不同品牌銷量

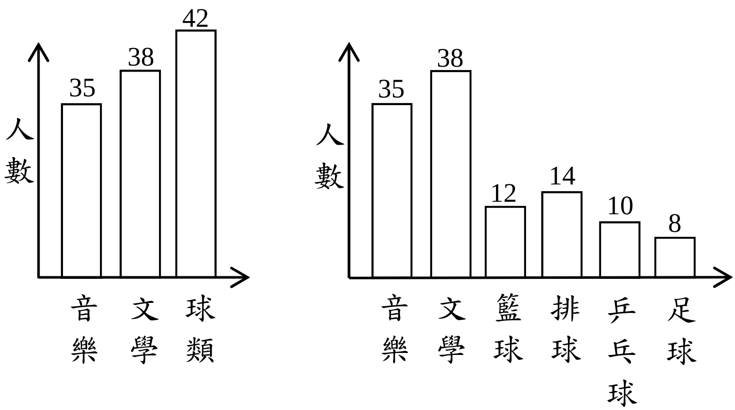


圖 5-16 學生喜歡的活動

統計圖表的正確應用，有助於我們認清事物的真象、發現事物變化的數量界限和揭示事物發展的內在規律；相反，統計圖表的錯誤使用，將造成事實的扭曲、讀者的誤解，甚至決策的失敗。因此，在使用統計圖表時，必須遵守規範；在讀取統計圖表時，也要養成檢查其規範性的習慣。下面我們看幾個例子，試着找出其中的問題之處：

在圖 5-17 中，注意到其縱軸不是從 0 開始，出生人口數目和幼兒園數目使用同一縱軸表示會引起混亂。另外，圖中兩

條縱軸的相對位置爲何要這樣呈現？幼兒園數目爲甚麼用條形圖而不用折線圖來呈現？

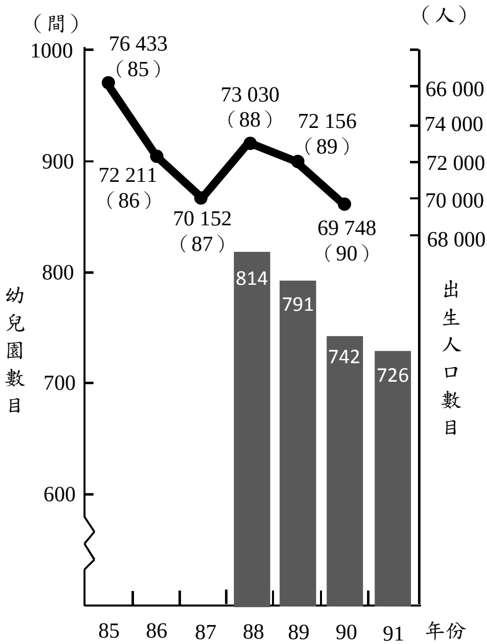


圖 5-17 幼兒園數目和出生人口數目

再比如，在圖 5-18 中 92-93 部分被遮擋了，看去比 95-96 還要“小”，同時亦無此立體圖的必要。

下面的統計圖，如圖 5-19 所示，又有甚麼問題呢？讀者可試着找找看。

不過也要注意，有時“誤用”其實是一種“誤導”，請看下例。

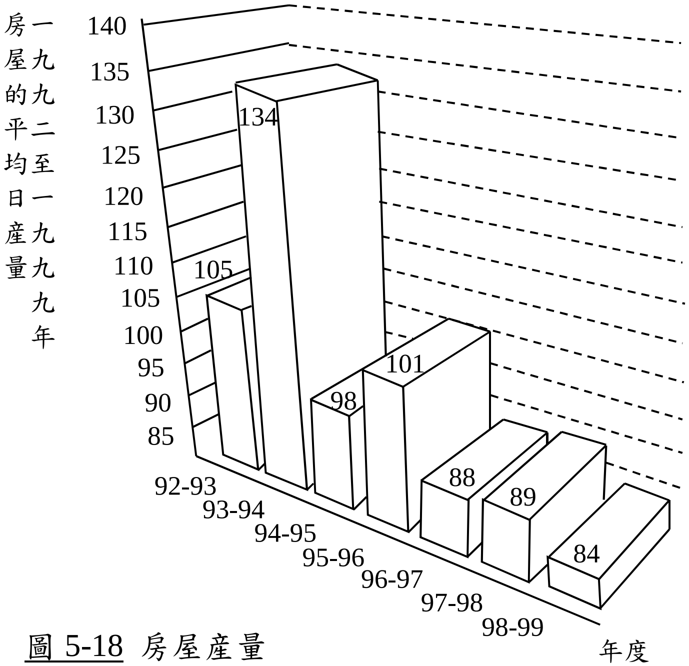


圖 5-18 房屋產量

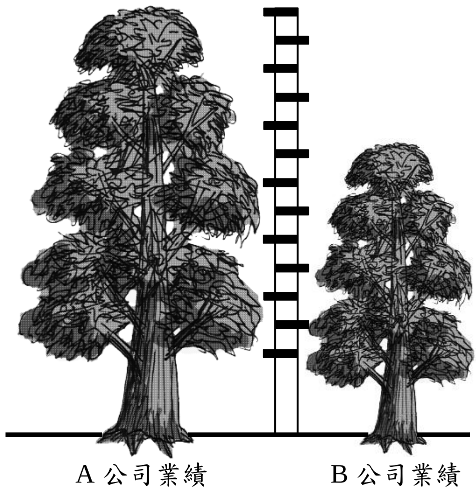


圖 5-19 業績比較

【**案例 5-8**】 圖 5-20 用視覺(縱軸不以 0 爲起點，即所謂“off origin design”)誇大了 Y 的銷量，但這個圖基本上是準確的，只是利用了視覺效果，精明的讀者仍可由此得出準確的數據。這亦正是學習統計的一個重要目的，讓學生變成精明的統計圖表或報告的解讀者。

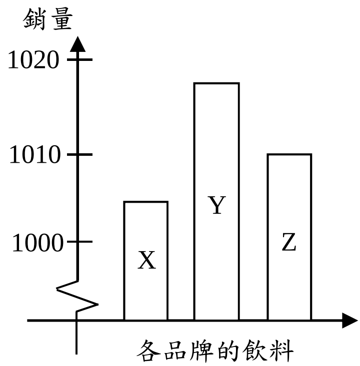


圖 5-20 銷量比較

第二節　概率

一、對隨機現象的初步探討

1. 必然現象與偶然現象

自然界中的各種現象，概括起來可以分爲必然現象和偶然現象兩大類。其中，必然現象在一定條件下必然會發生的現象。例如，地球既按固定的速率自轉又按固定的軌道和固定的速率繞着太陽運行；太陽從東方升起；蘋果成熟後會從樹上掉下來；一定氣壓下冰加熱至 0°C 就會開始融化等等。偶然現象則是指它們發生與否，事前不能肯定，例如，某地區一年之中何時發

生地震；某海濱一年之中何時會有海嘯；明天中午某地是否會打雷；母親懷孕前嬰兒性別的確定等等。相應的，人類對自然現象規律的探索也可以粗略分爲兩大類：定量地解釋並準確刻畫必然現象的客觀規律，揭示偶然現象中存在的規律性。

對偶然現象來說，它可能發生，也可能不發生；如果可能發生的話，也存在可能性高或可能性低的情況，人們就用概率來描述偶然現象發生可能性的高低：概率越接近 1，發生的可能性越高；概率越接近 0，發生的可能性越低。偶然現象也稱爲隨機現象，隨機現象中那些可能發生，也可能不發生的事件稱爲隨機事件。概率論就是研究隨機現象發生規律性的科學。

2. 偶然性與必然性

【案例 5-9】 隨機現象之所以具有隨機性，就在於其發生與否具有多種可能性，不可事前預卜。既是如此，又何來規律？“隨機”與“規律”不是自相矛盾的嗎？

分析：雖然人們無法確切地預見隨機現象的發生會出現甚麼樣的結果，但通過大量觀察與分析，還是可以找出某個事件發生的可能性到底有多大。我們一起來看看概率史上著名的拋擲硬幣試驗。

質地均勻的硬幣有兩個面，規定一個面是正面，另一個面就是反面。拋出的硬幣落到地面上，正面朝上還是反面朝上，則純屬偶然。當拋擲次數較少時，正面朝上的頻率是不穩定的；而當拋擲次數逐漸增多時，正面朝上的頻率就越來越穩定。十八世紀，幾位數學家做了成千上萬次的拋擲硬幣試驗，結果如表 5-2。

表 5-2 歷史上著名的拋擲硬幣試驗頻數（頻率）統計表[1]

試驗者	拋擲次數	正面向上的次數	正面向上的頻率
棣莫弗	2,048	1,061	0.518
布豐	4,040	2,048	0.5069
費勒	10,000	4,979	0.4979
皮爾遜	12,000	6,019	0.5016
皮爾遜	24,000	12,012	0.5005

表 5-2 中的數據表明，當投擲硬幣次數很大時，正面向上的頻率穩定在 0.5 附近，這說明：當試驗次數很大時，頻率將穩定在某一常數附近，這就是頻率的穩定性。我們就把這個穩定的相對頻率叫做“正面向上”這個事件的概率。

【案例 5-10】 偶然現象的出現會不會是因爲我們的知識準備不够？比如，如果我們調整拋擲硬幣的條件，是不是就可以準確地得到硬幣落地時的結果？或者當我們的氣象知識足够時，是不是就可以準確地預報明天的天氣呢？

分析：不錯，隨着人類知識的不斷增長，不少隨機現象會轉化爲可控制的確定性現象。例如：古代人對月蝕一無所知，甚麼時候發生月蝕對他們而言就是一個偶然事件；然而，隨着天文學的發展，人們掌握了行星的運行規律，明白了月蝕的成因，就能够準確地預知月蝕發生的具體時間，於是月蝕發生與否，就變成必然現象了。

然而，並不是所有的隨機現象都可以轉化爲必然現象。這不僅僅是因爲人類在一定階段內，其認識能力存在一定的有限

[1] 九年制義務教育課程標準實驗教科書，數學（九年級上），人民教育出版社 2008 年版，頁 141。

性，不可能掌握事物發展的所有規律。隨着人類認識能力的增長，研究對象與研究領域也會不斷擴展，新的偶然現象也會越來越多地湧現，等待着人類去探索。另一方面，還因爲，對於無限多的隨機現象而言，雖然在某些局部人們可以做到有限地控制相關條件，但其存在、發生和發展的原因具有無限多樣性，人們無法掌握其所有資料。就如上述的拋擲硬幣試驗，雖然理論上而言，如果我們知道硬幣的大小、重量、落地的角度、下落的高度、底面的彈性……那麼就可以預知硬幣哪個面向上，甚至是直立在邊上。然而，由於影響因素太多，我們無法掌握全部資料，也就無從知曉硬幣着地時的情況，也就只好把它當成偶然現象了。我們稱“概率＝0”爲必不可能事件，“概率＝1”爲必然事件，所有的概率均在 0 和 1 中間。

二、古典概型

明白了隨機事件及其發生的概率的意義後，就可以來計算隨機事件的概率了。我們首先研究最簡單的一類情形——古典概型。

1. 古典概型

概率論中把具有下列特徵的隨機現象的數學模型稱爲**古典概型**：

（1）試驗的一切可能結果只有有限多個；

（2）每一個結果在客觀上都以同樣的可能性發生。

這兩個特徵通常稱爲有限性與等可能性。

在古典概型中，隨機事件 A 的概率記作 $P(A)$，其計算公式爲 $P(A)=\frac{k}{n}$，其中 n 爲試驗的全部可能結果的數目，k 爲事

件 A 所包含的可能結果的數目。

2. 合成事件

在中學階段，學到的是以“或”及“和”連起來的合成事件。其實兩者的本意有所不同，前者屬同一事件空間，後者的事件空間若在相續事件的情況下已經改變。對於前者，就是人們熟悉的數的“加法公式”，即若兩事件 A 和 B 不會同時出現（則兩事件互相排斥），則 $P(A$ 或 $B) = P(A) + P(B)$。推廣到一般情況，就是 $P(A$ 或 $B) = P(A) + P(B) - P(A$ 和 $B)$。用溫氏圖再就清楚不過了，如圖 5-21 所示。更複雜的情況就可用“容斥原理”去計算。

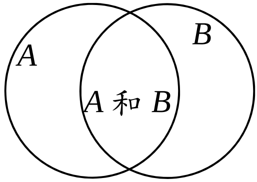


圖 5-21　合成事件

至於相續事件，即若 A 和 B 爲不相關事件（或稱 A 和 B 爲獨立事件），有 $P(A$ 和 $B) = P(A)\,P(B)$。一般情況是（縱使 A 和 B 相關），$P(A$ 和 $B) = P(B)\,P(B|A)$（或 $= P(A)\,P(A|B)$）。當中 $P(B|A)$ 表示當 A 事件已發生，B 事件會發生的概率（條件概率（conditional probability）），$P(A|B)$ 表示當 B 事件已發生，A 事件會發生的概率。

用圖 5-22 就可以給出解釋。對於擲兩個骰子，設 A 事件爲“第一顆數字大於 3”，B 事件爲“第 2 顆數字 2 或 3”。則 $P(A$ 和 $B) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$。這其實已運用了幾何模型，對於相關情況（如抽掉一球後不放回箱，再抽第二球），情況就會複雜一點。

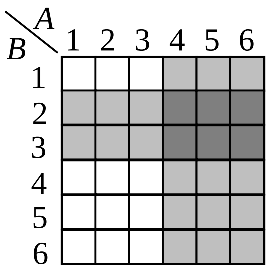


圖 5-22　條件概率

三、幾何概型

古典概型有兩個基本假設：只有有限多個可能發生的結果，及每個結果發生的可能性相等。兩個條件缺一不可。然而，不少偶然事件有無限多個可能發生的結果，例如送快遞的工作人員甲和你約好上午十點至十點半送包裹過來，他真正抵達的時間是上午十點至十點半之間的一個實數，而 10 與 10.5 之間有無數多個實數。如果希望求出你等待時間不超過 10 分鐘的概率，那麼顯然不能用上一節古典概型的方法。

【案例 5-11】 爲甚麼若 A 和 B 爲互斥事件 $P(A$ 或 $B) = P(A) + P(B)$；若 A 和 B 爲獨立事件，$P(A$ 和 $B) = P(A)\,P(B)$呢？

分析：這個問題可追溯至概率的公理化和相關定義。將概率的研究公理化（見後），其中一條爲若 $A_1, A_2, \ldots$ 爲兩兩不相交的子系，則有 $P(A_1 \cup A_2 \cup \ldots) = P(A_1) + P(A_2) + \ldots$。故從事件的角度，並限制只研究兩個事件（$A$ 和 B）。則可有 $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$。至於 $P(A$ 和 $B) = P(A)\,P(B)$，其實要先定義條件概率，“A 和 B”我們用“$A \cap B$”表示，則

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}\ 。$$

由此，若兩事件 A 和 B 互爲獨立，則事件 A 的發生與事件 B 的發生沒有關係，得

$$P(A|B) = P(A)\ 。$$

所以，$P(A|B) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(B)} \quad \Rightarrow \quad P(A \cap B) = P(A)P(B)$。

現在，假設送快遞的工作人員在上午十點至十點半之間的

30 分鐘內可能在任一時刻抵達，即每個發生的結果具有等可能性。我們不妨用一條線段 AB 來表示 30 分鐘的時間長度，用線段 AB 上的任一點 P 表示送快遞的工作人員抵達的時刻，用線段 CD 表示 10 分鐘的時間長度，如圖 5-23 所示。我們可規定等待時間不超過 10 分鐘的概率用 $\dfrac{CD\text{的長度}}{\text{AB的長度}}$ 來計算，那麼，所求的概率爲 $\dfrac{10}{30}=\dfrac{1}{3}$。這種規定其實用到了等可能性的假設，即，如果線段 EF 的長度等於線段 CD 的長度，就說點 P 在線段 CD 與線段 EF 上發生的概率相等。這個假設就是均勻分布，它把計算概率的數數問題轉化成了比較線段的長短問題。

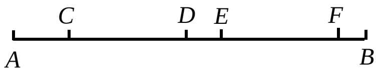
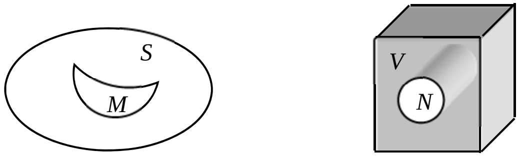


圖 5-23　線段長度表示時間

類似地，我們還可以根據具體情境，把隨機事件發生的無限多種可能結果用平面圖形或立體圖形來表示。如果用平面圖形表示，如圖 5-24(a) 所示，隨機事件 A 由圖形 M 中的點來代表，根據均勻分布假設，就可以算出 $P(A)=\dfrac{M\text{的面積}}{S\text{的面積}}$；如果用立體圖形表示，如圖 5-24(b) 所示，隨機事件 A 由圖形 N 中的點來代表，根據均勻分布假設，就可以算出 $\mathrm{P(A)}=\dfrac{N\text{的體積}}{V\text{的體積}}$。



(a) (b)

圖 5-24 幾何圖形表示隨機事件的發

用幾何圖形上的點代表隨機事件可能發生的結果，或用幾何上的量度（長度、面積、體積等）來計算隨機事件的概率，就叫做幾何概率，相應的概率模型就稱爲**幾何概型**。

幾何概型的試驗特點：第一，試驗的可能結果有無限多個，而且每一個結果發生的可能性是相等的。第二，隨機事件的發生在區域內均勻分布。所以隨機事件發生的概率大小與隨機事件所在區域的形狀和位置無關，只與該區域的度量大小有關。

在幾何概型中，隨機事件 A 的概率計算公式是：

$$P(A)=\frac{\text{構成事件}A\text{的區域長度（面積，體積）}}{\text{實驗的全部結果構成的區域長度（面積，體積）}}\text{。}$$

有很多的題目均可將之轉化成幾何模型來討論。更多的例子可參看附錄 9。

第 3 節　概率與統計的關係[2]

一、試驗概率和理論概率

試驗概率，顧名思義，就是從大量試驗資料中總結出某個事件發生的可能性。例如，擲硬幣 100 次，有 48 次是正面，我們便說投擲該硬幣出現正面的試驗概率是 0.48；如果擲了 1000 次，有 532 次是正面，試驗概率便是 0.532。由此可見，試驗概率隨試驗次數多少會轉變，並沒有一個確定值。理論概率是按照已知的條件，根據合理的推論得出某個事件發生的可能性。例如說，如果投擲一枚勻稱硬幣，沒有理由相信出現正面或反面的機會不相同，因此投擲該硬幣出現正面的理論概率是 0.5。反過來說，如果硬幣並不勻稱，擲到正面的機會大於擲到反面的機會，那麼投擲該硬幣出現正面的理論概率便不再是 0.5，而是大於 0.5 了。

1. 試驗概率趨於理論概率嗎

剛剛我們提到，試驗概率和理論概率是有所不同的。在不少教科書裏也都有類似的說法，只是表達形式各異。有的說“試驗次數越多，試驗概率便越接近理論概率”，“當試驗次數足够多時，試驗概率 ≈ 理論概率”，也有的說“試驗次數越多，試驗概率會趨向於理論概率”。對於“接近”，“≈”或者“趨向於”這些用語的精確意思，不同的作者或有不同的闡釋，但單從字面上來說，這樣的說法是有問題的。我們只可以說，試驗次數越多，試驗概率越更可能接近理論概率。

---

[2] 節錄自蕭文强、黃毅英（2009）（並略作修飾）。得合作者及編輯答允轉錄，謹此致謝。

2. 試驗概率和理論概率的關係

在十八世紀初雅各布布・伯努利（Jacob Bernoulli, 1654-1705）提出“大數定律”（Law of Large Numbers），說明理論概率可以從大量試驗數據中求出。現在我們來看看“大數定律”的具體內容。其實“大數定律”共有兩條：“弱大數定律”和“强大數定律”。和我們的討論有較密切關係的是“弱大數定律”；“强大數定律”涉及的數學背景知識超越了中學的認知範疇，於此不贅述了。

“弱大數定律”是這樣的：若 X 是一隨機變量，μ 爲 X 的平均值，$X_1,\ldots,X_n$ 爲 X 的隨機抽樣，而 $\overline{X_n}=\dfrac{1}{n}\left(X_1+\cdots+X_n\right)$，則對任意 $\varepsilon>0$，有 $\lim\limits_{n\to\infty}P\left(\left|\overline{X_n}-\mu\right|\geq\varepsilon\right)=0$。

這條定律並沒有說當 n 越大，樣本平均值 $\overline{X_n}$ 越接近 μ，只是說當 n 越大，$\overline{X_n}$ 偏離 μ 的可能性越接近零。也就是說，當 n 足够大時，很少有機會 $\overline{X_n}$ 偏離 μ。用更一般的語言來講，“大數定律”告訴我們，在大量試驗中某事件發生的相對頻率（就是試驗概率），通常是非常接近事件的理論概率。

以擲硬幣爲例（假設得正反兩面的概率均等），擲硬幣這事件形成的隨機變量稱爲 X，$X=0$（正面）或 $X=1$（反面）。我們作出抽樣 $X_1,\ldots,X_n$，假如得出 0 1 1 0 0 0 1 0 1 0 0 1 1 1 1 0…當 n 越來越大時，得出了不同的 $\overline{X_n}$：

N	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	…	…
X_n	0	1	1	0	0	0	1	0	1	0	0	1	1	1	1	0	…	…
$\overline{X_n}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{2}{4}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{2}{6}$	$\frac{3}{7}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{4}{9}$	$\frac{4}{10}$	$\frac{4}{11}$	$\frac{5}{12}$	$\frac{6}{13}$	$\frac{7}{14}$	$\frac{8}{15}$	$\frac{8}{16}$	…	…

在這種情況裏，$\overline{X_n}$確是越來越近$\frac{1}{2}$，但這並不表示是必然的（這也就是與上述提及的誤解的最大分別）。因爲的確有可能出現“特異”的情況，例如 1 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0... 或 1 1 1 1 1 1 0 1 1 1 1 1 1 1 1 1... ，只是出現這些情況的可能性是非常低的。

3. 理論概率的計算

怎樣界定和尋求某個事件發生的理論概率呢？有一種想法，認爲重複試驗許多次，該事件的相對頻率應該是頗穩定的，故而就把無限次試驗的相對頻率的極限叫做該事件發生的（理論）概率。用數學語言來說，設 n 次試驗中事件 A 發生 $M(n)$ 次（M 是 n 的函數），則事件 A 發生的概率 $P(A)$等於$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{M(n)}{n}$ 。

“大數定律”似乎爲這種想法提供了一些理論依據，但仔細一想又覺得十分彆扭！如果根據“大數定律”去界定概率，定律的內容卻又涉及概率，這就像說“在無限次試驗中事件 A 發生的相對頻率與 A 的（理論）概率相差是某個任意量”感覺像繞口令，也不容易明白！

這樣界定概率，還有幾點令人不安。首先，$M(n)$ 是隨 n 而變的，除了 $M(n)$ 是 n 的非遞減函數以外，$M(n)$ 與 n 沒有甚麼其它關係，也不能斷定$\frac{M(n)}{n}$有極限。其次，我們也沒有可能試驗無限次，如此界定只是理想情況而已。再者，有不少事件並不能採用重複試驗的方法去界定概率，例如“明天下雨的概率是 0.7”，或者“有八成機會‘陳九秒’在今年奧運奪取一百米金牌”。

因此，數學家庭採用了一種“釜底抽薪”的方法去界定概率。它們索性把概率看作是定義在樣本空間（sample space）S 的子集上的實數值函數 P，滿足以下的公理：

[P1] $P(S) = 1$；

[P2] 若 A 是 S 的子集，則 $0 \leq P(A) \leq 1$；

[P3] 若 $A_1, A_2, \ldots$ 是 S 的兩兩不相交的子集，則 $P(A_1 \cup A_2 \cup \ldots) = P(A_1) + P(A_2) + \ldots$ 。

這裏的所謂樣本空間就是某項試驗可能發生的所有結果的集合，它的子集便叫做事件。例如投擲一顆骰子，$S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ 有六個結果。$A = \{1, 3, 5\}$ 代表擲到奇數點這個事件。

上述的界定中沒有說明如何設定那個函數 P，只要求它滿足 [P1]、[P2] 和 [P3]。靠着這三條公理，加上知道某部份事件——稱爲基本事件——的概率，我們便能計算任何事件的概率了。就以 $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ 爲例，如果骰子是勻稱的，合理的假設是 $P(\{1\}) = P(\{2\}) = P(\{3\}) = P(\{4\}) = P(\{5\}) = P(\{6\}) = \frac{1}{6}$，因此 $P(\{1, 3, 5\}) = P(\{1\}) + P(\{3\}) + P(\{5\}) = 3 \times \frac{1}{6} = 0.5$，即是說，擲到奇數點與擲到偶數點的機會是相同的。要是你擲骰子 100 次，發現只有 12 次擲到奇數點，再擲 100 次，發現只有 8 次擲到奇數點，你便會懷疑那顆骰子是否勻稱了。

二、概率公理化與建模過程

從上面公理化處理的角度看，試驗概率與理論概率是兩種不同的觀念，從某種意義來講，它們沒有直接關係。但它們卻

有另一層面的微妙關聯。

不妨把公理化處理看成是一個建模過程，即是把實際問題譯成數學語言，建立一個數學模型。在這個過程中，我們把實際情形理想化和簡化，以便用適當的數學方法進行分析求解。由於我們把情形理想化和簡化，得到的答案可能只是近似答案，是否適用還得回到實際觀測作檢驗，逐步調整模型去獲得更好的答案。“大數定律”是基於 [P1] 、 [P2] 和 [P3] 這些公理，運用邏輯推論得來的結果，在實際觀測中的確如此，也印證了概率建模符合實際情理。

理論概念是如何設定的呢？在一些情況，如投擲一枚勻稱硬幣，我們按常理設定理論概率：假設硬幣是勻稱的，按定義，有 $P(\text{正面}) = P(\text{反面}) = 0.5$，但在另一些情況下，試驗可以是一種參考點。例如，一台機器會生產不合規格的產品，這牽涉保險和賠償等問題，我們必須評估生產，得出生產不合規格產品的可能性是 0.00001，這當然是試驗概率，不是理論概率。而且，可能測試越多，機器越磨損，生產不合規格產品的機會越大。不過，我們爲了評估風險，建立數學模型時採取這個試驗概率作爲理論概率，也合乎常理。一旦我們作了這個設定，其它風險評估等計算，就可依循數學方式進行。我們有理由相信這台機器生產不合規格產品的理論概率是客觀存在的，只是我們未必有足夠的數據和技術找出來罷了。

讓我們看一個運用計算能幫助我們增進理解的例子。例如，有一堆電子組件，一半產自甲廠，另一半產自乙廠，從中抽取一件，問這一件產自甲廠的機會是多少；如果單單知道這麼多，我們只能說這一件產自甲廠的機會是 $\frac{1}{2}$。如果我們再知道這一件是不合格的電子組件，而且知道甲廠生產不合格的電子

組件的可能性是乙廠的三倍，你認爲這一件產自甲廠的機會仍然是$\frac{1}{2}$嗎？現在我們知道的數據變多了，便可以運用以貝斯（Thomas Bayes, 1702-1761）命名的公式去計算，得到的概率是$\frac{3}{4}$。貝斯公式用來計算某個事件的條件概率，是概率論的基本知識，讀者可以在中學數學教科書中找到。於於此，我們關鍵是要明白，這個答案是從概率模型中計算得來的。固然，我們可以再回到試驗進行觀測，假如試驗結果並不接近$\frac{3}{4}$，我們便會懷疑那堆電子組件是不是真的一半產自甲廠，另一半產自乙廠。如果從實際觀測得來的答案幾乎就是$\frac{1}{2}$，你能否再用一次貝斯公式計算那堆電子組件有多少產自甲廠？有多少產自乙廠呢？

附錄 1

埃拉托色尼篩法（Sieve of Eratosthenes）

以下表爲例，找尋 1～50 以內的所有質數。2 是質數，以 2 爲篩子，留下 2 並刪去 2 的倍數。2 之後未被刪去的第一個數是 3，它是質數；以 3 爲篩子，留下 3 並刪去 3 的倍數。3 之後未被刪去的第一個數是 5，它是質數；以 5 爲篩子，留下 5 並刪去 5 的倍數。5 之後未被刪去的第一個數是 7，它是質數；以 7 爲篩子，留下 7 並刪去 7 的倍數。7 之後未被刪去的第一個數是 11，它是質數。到此就算完成尋找所有介於 1 和 50 之間的質數，因爲 50 的平方根大於 7 而且小於 8，現在表格所剩的數字都是質數。

~~1~~	2	3	~~4~~	5	~~6~~	7	~~8~~	~~9~~	~~10~~
11	~~12~~	13	~~14~~	~~15~~	~~16~~	17	~~18~~	19	~~20~~
~~21~~	~~22~~	23	~~24~~	~~25~~	~~26~~	~~27~~	~~28~~	29	~~30~~
31	~~32~~	~~33~~	~~34~~	~~35~~	~~36~~	37	~~38~~	~~39~~	~~40~~
41	~~42~~	43	~~44~~	~~45~~	~~46~~	47	~~48~~	~~49~~	~~50~~

附錄 2

質數是無限個的證明

歐幾里得證明的方法確實十分巧妙。在一次科學論證會上他說，如果質數個數有限，那麼我們可將它一一寫出來，比如 $P_1, P_2, \ldots, P_n$ ，此外再也沒別的更大的質數了。但是你們看，$P_1P_2\ldots P_n+1$ 這個數，它顯然不能被 $P_1, P_2, \ldots, P_n$ 中的任一個整除；這個數，要麼是質數要麼是合數。若是質數，則說明除 $P_1, P_2, \ldots, P_n$ 這 n 個質數外，還有比 $P_1, P_2, \ldots, P_n$ 這些質數更大的質數存在；若是合數，則它必被另一個質數 k 整除，而這個質數 k 不會是前面 n 個質數中的一個；無論那種情況，這都與質數僅有 n 個相矛盾，所以質數個數是無限的。歐幾里得以十分簡明的形式，有力地論證了質數個數無限，全場人聽了都贊嘆不已，就連原來認爲質數個數有限的人也連連稱贊這個證明“漂亮”。質數的無限性，雖然在《原本》中有記載，但是否“後人”加上的，今天仍具爭議。

附錄 3

負數的歷史

中國是世界上最早使用正負數概念的國家，《九章算術》的《方程》章中就引入了負數概念並給出了正負數加減運算法則——正負術：“同名相除，異名相益，正無入負之，負無入正之；其異名相除，同名相益，正無入正之，負無入負之。”前四句是減法法則，後四句是加法法則，其中的同名、異名分別指同號、異號，相益、相除（這裏的除指減）分別指絕對值相加或相減，“無”具有零的意思。這些運算法則與現代使用的正負數加減運算法則完全一致。公元 1259 年，李冶（1192—1279）在他所著《益古演段》中，在一個數上畫一條斜線表示負數，與現代使用的負號“－”，形式上只有橫斜之差，但本質無異。1299 年，朱世杰（約 1249－1314）撰寫的《算學啓蒙》“明正負術”中更加明確地給出了正負數的加減法則，並在“明乘除段”中給出了“同名相乘爲正，異名相乘爲負”的乘法法則，這是世界上關於正負數乘法法則的最早記載。關於正負數除法，朱世杰在 1303 年撰寫的《四元玉鑒》中亦明確給出。可見，中國對正負數的概念及四則運算早在元朝已臻完善。

在歐洲，斐波那契（Leonardo Fibonacci, 約 1175-1250）是第一個正確認識負數的人，但他並未解決負數問題。以後，歐洲許多數學家都發現了負數，但卻認爲是假數，或說成是荒謬的數。直至 1633 年，笛卡兒（Rene Descartes, 1596-1650）在他的《幾何學》裏論述了正負數的幾何解釋，才使正負數的

概念逐漸得以承認。在 19 世紀外爾斯特拉斯（K. T. W. Weierstrass, 1815-1897）、戴德金（J.W.R. Dedekind, 1831-1916）和皮亞諾（G. Peano, 1858-1932）奠定了整數的邏輯基礎之後。負數在歐洲的才被最終確認。

歐拉（L. Euler, 1707-1783）恐怕是世界上第一個“正式”解釋“負負得正”的。雖然可能有點牽强，他首先確定了 $(+a)(+b) = ab$，再以欠債的比喻解釋 $(+a)(-b)$ 和 $(-a)(+b)$ 均爲 $-ab$。而 $(-a)(-b)$ 之純量切爲 ab 是大家可以接受的。它不是 ab 就是 $-ab$ 了。而 $(-a)(-b)$ 不可能是 $-ab$。所以一定是 ab 了（L. Euler, 1765, *Element of Algebra*）。對負數的瞭解和運算在歷史上殊不容易，因此學生學習時有種種困難也是可以理解的。

附錄 4

三次方程的求解

卡爾丹諾（Girolamo Cardano, 1501-1576）在《大法》（*Ars Magna*）中詳細論述了求解 $x^3+px=q$ 的方法，該方法的要點是：

設　$x=u+v$，

$$(u+v)^3+p(u+v)=q \text{，}$$
$$u^3+3u^2v+3uv^2+v^3+p(u+v)=q \text{，}$$
$$u^3+v^3+3uv(u+v)+p(u+v)=q \text{，}$$
$$u^3+v^3+(3uv+p)(u+v)=q \text{，}$$

令　$3uv+p=0$，

故有　$\begin{cases} 27u^3v^3=-p^3 \text{，} \\ u^3+v^3=q \text{，} \end{cases} \quad (*)$

解 u,v 求得實根爲

$$x=\sqrt[3]{\frac{q}{2}+\sqrt{\frac{p^3}{27}+\frac{q^2}{4}}}+\sqrt[3]{\frac{q}{2}-\sqrt{\frac{p^3}{27}+\frac{q^2}{4}}} \text{。}$$

如果這種方程能够求解，那麼一般的三次方程

$$x^3+ax^2+bx+d=0$$

就可以通過變量代換得到，如設 $x=y-\dfrac{a}{3}$，一般三次方程就可

以化成 $y^3+Ay+B=0$ 的形式。

對於 (*)，u^3 及 v^3 可分情況作如下討論：

<u>情況 1</u>：$\frac{p^3}{27}+\frac{q^2}{4}>0$。

此時，u^3 及 v^3 爲實數。若以 $\bar{u}$ 及 $\bar{v}$ 記 u^3 及 v^3 的算術立方根，則 u 及 v 的可能值爲：

$$\bar{u},\ \omega\bar{u},\ \omega^2\bar{u} \quad 及 \quad \bar{v},\ \omega\bar{v},\ \omega^2\bar{v},$$

其中 $1, \omega, \omega^2$ 爲 1 的三個立方根。

由於 u 及 v 的選取須令 $uv=-\frac{p}{3}$（實數），

故得三次方程的三個根爲 $\bar{u}+\bar{v},\ \omega\bar{u}+\omega^2\bar{v},\ \omega^2\bar{u}+\omega\bar{v}$

即方程在這情況下，有一實根及兩複數根。

<u>情況 2</u>：$\frac{p^3}{27}+\frac{q^2}{4}=0$。

此時，$u^3=v^3=\frac{q}{2}$。若以 $\bar{u}$（$=\bar{v}$）記 $\sqrt[3]{\frac{q}{2}}$（$\frac{q}{2}$ 的算術立方根）。

則三次方程的三根爲

（i） $\bar{u}+\bar{v}=\bar{u}+\bar{u}=2\bar{u}$。

（ii） $\omega\bar{u}+\omega^2\bar{v}=(\omega+\omega^2)\bar{u}=-\bar{u}$。

（iii） $\omega^2\bar{u}+\omega\bar{v}=(\omega^2+\omega)\bar{u}=-\bar{u}$。

即三次方程有兩實根，其中一爲二重根。

<u>情況 3</u>：$\frac{p^3}{27}+\frac{q^2}{4}<0$。

此時 u^3 及 v^3 爲複數，其三次方根亦爲複數。若 $p+iq$ 爲 u^3 的三次方根，則 $p-iq$ 爲 v^3 的三次方根。由複數得實數，故得三根爲（應用 uv 爲實數之條件）

（i） $(p+iq)+(p-iq)=2p$ 。

（ii） $\omega(p+iq)+\omega^2(p-iq)=(\omega+\omega^2)p+i(\omega-\omega^2)q$
$=-p-q\sqrt{3}$ 。

（iii） $\omega^2(p+iq)+\omega(p-iq)=(\omega+\omega^2)p+i(\omega^2-\omega)q$
$=-p+q\sqrt{3}$ 。

即三次方程在此時有三個實根。這種解法也被稱爲“卡爾丹諾解法”。

在《大法》中還收錄了費拉裏（Lodovico Ferarei, 1522-1565）對一般四次方程的解法：對形如 $x^4+px^3+qx^2+rx+s=0$ 的一般四次方程，通過配方都可以變換爲：

$$(x^2+\frac{px}{2}+\frac{y}{2})^2=(\frac{p^2}{4}-q+y)x^2+(\frac{py}{2}-r)x+(\frac{y^2}{4}-s)，$$

等式左邊爲完全平方，故右邊的判別式應等於 0，那就化成一個三次方程，再用上面的方程就可得到解。

附錄 5

高階等差數列及招差法

1. 高階等差數列

當然我們一般是指“簡單”的數列。如果規定數列函數爲一多項式（整數冪），則有一套機械性的辦法。以數列“1, 6, 23, 58, 117, …”爲例，把鄰項不斷相減，得出

1,　6,　23,　58,　117
∨　∨　∨　∨
5,　17,　35,　59
∨　∨　∨
12,　18,　24

12, 18, 24 是等差數列，容易得出下一項：

1,　6,　23,　58,　117,　206
∨　∨　∨　∨　∨ ↑
5,　17,　35,　59,　89
∨　∨　∨　∨ ↑
12,　18,　24, → 30

要找出其中的公式亦不難。這正是我國古代數學家的招差術[1]。運用此法，我國宋元時期的數學家在高階等差級數方面取得了很多的成就。一個數列儘管它的後項減去前項的結果不一定是等差，但其差數的差數假如滿足前後相等的話，就稱爲

[1] 招差術在宋代的幾位數學家中都有介紹，又以朱世杰《四元玉鑒》中的介紹最爲精彩。

二階等差數列。假如差的差的差是相等的，則稱爲三階等差數列。依次可推廣至高階等差數列。簡單來講，以三階等差數列爲例：我們將 $a_1, a_2, a_3, a_4, \ldots$，作第一次差得$b_1, b_2, b_3, \ldots$，再作第二次差得等差數列，$c_1, c_2, \ldots$ ，其公差爲 d。故

$$\begin{array}{ccccccccc}
a_1, & & a_2, & & a_3, & & a_4, & & \ldots \\
& \vee & & \vee & & \vee & & & \\
& b_1, & & b_2, & & b_3, & & \ldots & \\
& & \vee & & \vee & & & & \\
& & c_1, & & c_2, & & \ldots & &
\end{array}$$

當中 $c_2 - c_1 = c_3 - c_2 = \ldots = d$ 。

因此，

$$c_n = c_1 + (n-1)d = nd + c_1 - d,$$

$$b_n = b_1 + \sum_{r=1}^{n-1}(rd + c_1 - d) = \frac{a}{2}n^2 + \frac{2c_1 - 3d}{2}n + b_1 - c_1 + d,$$

$$a_n = a_1 + \sum_{r=1}^{n-1}(\frac{d}{2}r^2 + \frac{2c_1 - 3d}{2}r + b_1 - c_1 + d)$$

$$= \frac{1}{6}[dn^3 + 3(c_1 - 2d)n^2 + (6b_1 - 9c_1 + 11d)n + 6(a_1 - b_1 + c_1 - d)]$$

容易驗證，用招差術與內插法所得到的公式其實是吻合的。

2. 遞推數列：

1202 年意大利數學家斐波那契（Fibonacci）出版了他的《算盤全書》（*Liber Abaci*）。他在書中提出了一個關於兔子繁殖的問題：

如果一對兔子每月能生一對小兔（一雄一雌），而每對小兔在它出生後的第三月裏，又能開始生一對小兔，假定在不發

生死亡的情況下，由一對出生的小兔開始，50 個月後會有多少對兔子？

從第一個月開始以後每個月的兔子總對數是：1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, …。

若把上述數列繼續寫下去，得到的數列便稱爲斐波那契數列。如果用 F_n 表示第 n 個月的兔子總對數，則 $F_1=1$，$F_2=1$，$F_3=2$，$F_4=3$，$F_5=5$，$F_6=8$，$F_7=13$，$F_8=21, \ldots$。不難看出，該數列有下列關係式：$F_n=F_{n-1}+F_{n-2}$。於是，斐波那契數列有如下的表達式：

$$F_n=\frac{\left[\left(1+\sqrt{5}\right)^n-\left(1-\sqrt{5}\right)^n\right]}{2^n\times\sqrt{5}}。$$

如把數列中相鄰的數字相除，以組成新數列：$\frac{1}{1},\frac{1}{2},\frac{2}{3},\frac{3}{5},\frac{5}{8},\frac{8}{13},\frac{13}{21},\ldots,\frac{F_n}{F_{n+1}},\ldots$，當 n 趨向無限大時，該數列的極限是 $\gamma=\frac{\sqrt{5}-1}{2}$，而它正好是方程 $x^2+x-1=0$ 的一個根。這個數值就是著名的黃金分割比（簡稱黃金比）。

這其中，就涉及到了二項線性循環數列。那麼若給出 u_0、u_1 及 $u_{n+1}=au_n+bu_{n-1}$（$n\geq 1$），$ab\neq 0$，$a, b\in \mathbf{C}$，如何找 u_n。這裏，我們給出尋找 u_n 的算法。

首先
$$\begin{aligned} u_{n+1}-xu_n &= (a-x)u_n+bu_{n-1} \\ &= (a-x)(u_n-xu_{n-1})-(x^2-ax-b)u_{n-1}, \end{aligned}$$

解 $x^2-ax-b=0$ 得二根：$\{\alpha,\beta\}$

$$u_{n+1}-\alpha u_n = (a-\alpha)(u_n-\alpha u_{n-1})-0 \text{。}$$

令 $a-\alpha=\beta$，故有

$$\begin{array}{lrl}
& u_{n+1}-\alpha u_n &= \beta(u_n-\alpha u_{n-1}) \\
& u_n-\alpha u_{n-1} &= \beta(u_{n-1}-\alpha u_{n-2}) \\
& & \cdots \\
\times) & u_2-\alpha u_1 &= \beta(u_1-\alpha u_0) \\
\hline
& u_{n+1}-\alpha u_n &= \beta^n(u_1-\alpha u_0) \text{，}
\end{array} \qquad (1)$$

同理

$$u_{n+1}-\beta u_n = \alpha^n(u_1-\beta u_0) \text{，} \qquad (2)$$

$(1)-(2)$ 得

$$u_n=\frac{\alpha^n(u_1-\beta u_0)-\beta^n(u_1-\alpha u_0)}{\alpha-\beta} \text{。}$$

若 $\alpha=\beta$ 或二次方程無實數根，此法行不通，需要進行適當的修改，於此不贅。

附錄 6

《原本》包括五條公理和五條公設，每卷的第一部分是基本定義，然後根據這些定義、公理和公設，證明了相關的命題定理。

《原本》中各卷內容分類：

卷號	內容分類
第一卷	幾何基礎篇 定義 23 個、命題 48 個；另外提出了 5 條公設和 5 條公理，但之後就再沒有加入新的公設或公理。
第二卷	幾何代數 以幾何方式研究代數公式。例如： $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$。
第三卷	圓形 討論圓的性質。
第四卷	正多邊形 討論繪畫圓內接和外切三角形及正多邊形以及繪畫三角形及正多邊形內切圓和外接圓的方法。
第五卷	比例論 這卷內容依據歐多克索斯的理論而編寫，當中比例的定義，對後世數學發展有深遠的影響。

卷號	內容分類
第六卷	相似圖形 討論相似三角形、相似圖形及其應用。
第七至 第九卷	數論 探討最大公因子、偶數、奇數、質數、完全數等性質。
第十卷	不可公度量 共有命題 115 個，是最冗長、最富爭議性但最精密的一卷。
第十一至 第十三卷	立體幾何 探討立體幾何中的定理，並證明只有五種正多面體的現象。

最開始的 48 個命題內容如下：

命題 1—3：　認識繪圖工具

命題 4—8：　SAS、SSS 及等腰三角形

命題 9—12：　作圖：兩等分角和線段，垂直關係

命題 13—17：　直線上的鄰角、對頂角、同位角、外角定理

命題 18—21：　三角形的不等式：大邊對大角、兩邊之和大於第三邊

命題 22—23：　作圖：複製三角形、複製已知角

命題 24—25：　不等式（兩個三角形的比較）

命題 26：　ASA 與 AAS

命題 27—32：　平行論及三角形內角和

命題 33—36：　平行四邊形及其面積

命題 37—41：　三角形面積

命題 42—46：　作圖：已知面積的三角形和平行四邊形、正方形

命題 47—48：　勾股定理及逆定理

下面是《原本》的第一卷中的定義、公設和公理。

【定義】

① 點是沒有部分的。

② 線是無闊度的長度。

③ 線的兩端是點。

④ 直線是點沿着一定方向及其相反方向無限平鋪。

⑤ 面只有長度和闊度。

⑥ 一個面的邊是線。

⑦ 平面是直線自身的均勻分布。

……

一共 23 個。

【公設】

① 由任意一點到任意（另）一點可作直線。

② 一條有限直線可以繼續延長。

③ 以任意點爲（圓）心及任意距離（爲半徑）可以畫圓。

④ 凡直角都相等。

⑤ 同平面內一條直線和另外兩條直線相交，若在某一側的兩個內角的和小於二直角，則這兩直線經無限延長後在這一側相交。

【公理】

① 等於同量的量彼此相等。

② 等量加等量，其和相等。

③ 等量減等量，其差相等。

④ 彼此能重合的物體是全等的。

⑤ 整體大於部分。

附錄 7

希爾伯特公理系統

1. 關聯公理（Axioms of Connection）

I_1 已知 A 和 B 兩點，恆有一直線 a，它屬於 A 和 B 這兩點中的每一點，而且 A 和 B 這兩點的每一點也屬於 a。

I_2 已知 A 和 B 兩點，至多有一直線，它屬於 A 和 B 這兩點中的每一點，而且 A 和 B 這兩點的每一點也屬於這條直線。

I_3 一直線上至少有兩點，而至少有三點不在同一直線上。

I_4 已知不在同一直線上的 A、B 和 C 點，恆有一平面 a，它屬於 A、B 和 C 這三點中的每一點，而且 A、B 和 C 這三點中的每一點 也屬於 a。已知一平面，恆有一點屬於這平面，而且這平面也屬於這個點。這時也說：點 A 在平面 a 上，A 是平面 a 的點，等等。

I_5 已知不在同一直線上的 A、B 和 C 三點，至多有一平面，它屬於 A、B 和 C 這三點中的每一點，而且 A、B 和 C 這三點中的每一點也屬於這個平面。

I_6 若一直線 a 的 A 和 B 兩點在平面 a 上，則 a 的每一點都在平面 a 上 。

I_7 若 α 和 β 兩平面有一公共點 A，則它們至少還有另一公共點 B。

I_8 至少有四點不在同一平面上 。

2. 順序公理（Axioms of Order）

一直線上的點有一定的相互關係，用“在…之間”這個術語來

描寫它。

II_1　若點 B 在點 A 和點 C 之間，則 A、B 和 C 是一直線上的不同的三點，而且 B 也在 C 和 A 之間

II_2　己知 A 和 C 兩點，在 AC 上恆有至少一點 B，使得 C 在 A 和 B 之間。

II_3　一直線的任意三點中，至多有一點在其它兩點之間。

II_4　設 A、B 和 C 是不在同一直線上的三點。設 a 是平面 ABC 的一直線，但不通過 A、B 和 C 這三點中的任何一點，則它必定也通過線段 AC 或 BC 的一點（Pasch's Theorem）。

如果採用直觀的說法，公理 II_4 可以說成：若一直線走進三角形內部，則它必定還要走出來。

3. 合同公理（Axioms of Congruence）

合同公理是爲了處理圖形的移動而引進的。

某些線段之間有一定相互關係，用"合同"或"相等"這個術語表示。線段 AB 與 $A'B'$ 全合或相等，可用記號表示爲 $AB=A'B'$。

由於 AB 和 BA 表示同一線段，所以上式中的 AB 可改寫成 BA，$A'B'$ 可以改寫成 $B'A'$。

III_1　設 A 和 B 是直線 a 上的兩點，A' 是直線 a' 上的點，a' 可以與 a 相同，也可以不同。又設指定了直線 a' 上 A' 的一側，則在 a' 上 A' 的指定一側有點 B'，使 $AB=A'B'$。

這條公理實質上是說，線段能從任一位置移動到另一任意指定位置。

III_2　若 $A'B'=AB$ 並且 $A''B'''=AB$，則 $A'B'=A''B''$。

這條公理相當於歐幾里得的“等於同量的量相等”，但是僅限於線段 。

III$_3$ 設兩線段 AB 和 BC 在同一直線 a 上，且無公共點；兩線段 $A'B'$和 $B'C'$在同一直線 a'上，也無公共點，a'可與 a 相同，也可不同。若 $AB = A'B'$且 $BC = B'C'$則 $AC = A'C'$

III$_4$ 設給定了一平面 a 上的一個角$\angle(h, k)$，平面 a'上的直線 a'，以及平面 a'上直線 a'的一側，設 h'是直線 a'上一點 O'開始的一條射線，則在平面 a'上在 a'的指定一側恰有一條射線 k'，使$\angle(h, k)=\angle(h', k')$ 。每個角與它自己合同。

這個公理由兩部分組成：前一部分是說一個角可從任一位置移動到另一任意位置；後一 部分是說每個角與它自己相等 。

III$_5$ 設兩個三角形 ABC 和 $A'B'C'$若滿足 $AB = A'B'$，$AC = A'C'$，$\angle BAC = \angle B'A'C'$則必有 $\angle ABC=\angle A'B'C'$。

4. 平行公理（Axioms of Parallels）

IV 歐幾里得公理：設 a 是任一直線，A 是 a 外的任一點。在 a 和 A 決定的平面上，至多有一條直線過 A 而不與 a 相交。

5. 連續公理（Axioms of Continuity）

V$_1$ 阿基米德公理（Axioms of Archimedes）：若 AB 和 CD 是任意兩線段，則在從 A 開始並通過點 B 的射線上必有這樣的有限個點 $A_1, A_2, \ldots, A_n$，使得線段 $AA_1, A_1A_2, \ldots, A_{n-1}A_n$ 都與線段 CD 全合，而且 B 在 A 與 A_n 之間。

V$_2$ 完備公理（Axioms of Completeness）：一直線上的點所成

的點集，在保持直線上的次序、第一條合同公理、以及阿基米德公理（即公理 $I_{1\text{-}2}$，II，III_1，V_1） 的條件下，不可能再行擴充 。

附錄 8

SMSG 公設

不定義名詞：點、線、面、通過、距離、角度量、面積、體積

公設 1. 給定相異的兩點，恰有唯一的直線穿過該兩點。

公設 2. （距離公設）就每對相異的點，有唯一的正數與之對應，稱此數爲該兩點間的距離。

公設 3. （直尺公設）直線上的點可與實數作對應，使得（1）在線每一點恰與一實數對應；（2）每一實數恰與直線上的一點對應；（3）兩相異點的距離爲該兩個對應實數差的絕對值。

公設 4. （直尺配置公設）給定直線上的兩點 P 與 Q，均可選擇一坐標系統使得 P 的坐標爲 O，Q 的坐標爲正數。

公設 5. 每一平面均包含最少三個非共線點，空間則包括最少四非共面點。

公設 6. 若兩點在同一平面上，則穿過此兩點的直線必在該平面上。

公設 7. 任意三點處於最少一個平面上，而任意三個非共線點則處於唯一的平面上。

公設 8. 若兩平面相交，其相交必爲一直線。

公設 9. （平面分隔公設）給出一直線及一包含此直線的平面，不在該直線上的平面各點，形成兩集合，使得：（1）兩者均爲凸集；及（2）若 P 在其中一集，Q 在另一集，則線段 PQ 必與上述直線相交。

公設 10. （空間分隔公設）空間中，不在一特定平面上的各點

形成兩集，使得：（1）兩者均爲凸集；及（2）若 P 在一集：Q 在另一集，則線段 PQ 必與該平面相交。

公設 11. （角度量公設）每一角$\angle x$ 均對應於一個在 0 至 180 之間的實數，此實數名爲此角的度量，以 m $(\angle x)$記之。

公設 12. （作角公設）設 AB 爲半平面 H 邊緣的一射線。對於任何 0 至 180 之間的 r，必有唯一的射線 AP， P 在 H 內，使得 $\mathrm{m}(\angle PAB) = r$。

公設 13. （角相加公設）若 D 爲$\angle BAC$ 的內點，則 $\mathrm{m}(\angle BAC) = \mathrm{m}(\angle BAD) + \mathrm{m}(\angle DAC)$。

公設 14. （互補公設）若兩角形成一直線，則它們互補。

公設 15. （SAS 公設）給出兩三角形（或三角形與自身）之間的一一對應。若兩邊及其夾角與另一三角形的相對部分相等，則此兩三角形全等。

公設 16. （平行公設）過線外一點，只有最多一直線與該線平行。

公設 17. 對任一多邊形所圍成的區域，有唯一的正實數與之對應，稱爲其面積。

公設 18. 若兩三角形全等，則這兩三角形的面積相等。

公設 19. 若區域 R 爲兩區域 R_1 及 R_2 的併集，若 R_1 及 R_2 最多相交於有限數量的線段或點，則 R 的面積爲 R_1 與 R_2 的面積之和。

公設 20. 矩形面積爲其長與高的長度之積。

公設 21. 長方體的體積爲其底面積與高度之積。

公設 22. （祖暅原理）給出兩立體和一平面。若任一平行於上述平面的平面，與此兩立體相交區域的面積相等，則此兩立體的體積相等。

附錄 9

解決幾何概型問題的關鍵是利用已知條件建立適當的幾何模型，然後再從建立的幾何模型入手來解決概率問題。下面我通過幾個例子來說明這種建模的方法。

【案例 5-12】 取一根長度爲 1m 的繩子，拉直後在任意位置剪斷，那麼剪得兩段的長度都不小於 40cm 的概率有多大?

分析：根據條件“拉直後在任一位置剪斷”可以判斷，剪斷點的選取有無限多種，且在每一點選取的可能性都是一樣的，因此滿足幾何概型的條件。記“剪得兩段繩子都不小於 40cm”爲隨機事件 A，把繩子 MN 分成 40cm、20cm 和 40cm 三段（如圖 5-25），於是剪斷點應該落在中間的一段上。所以，隨機事件 A 發生的概率 $P(A) = 20/100 = 0.2$。

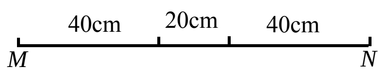


圖 5-25 線段長不小於 40 的概

【案例 5-13】 設桌面被用線劃分成很多個大小爲 6cm × 6cm 的正方形。現用直徑爲 2.5cm 的一元硬幣投擲到此桌面上，求硬幣落下後恰巧落在一個正方形內的概率。

要解答這個問題，只需要抓住關鍵，即硬幣中心的落點位置。由於硬幣的直徑一定，硬幣與硬幣中心一一對應，故可以根據硬幣中心的位置確定硬幣與正方形網格的位置關係。硬幣落在正方形內，則硬幣中心與正方形網格線的距離小於 1.25cm，把正方形的各邊向內縮 1.25cm，得到一個邊長爲 3.5cm 的小

正方形，硬幣落下後恰巧落在一個正方形內，則硬幣中心就恰好落在如圖 5-26 所示的陰影區域內。

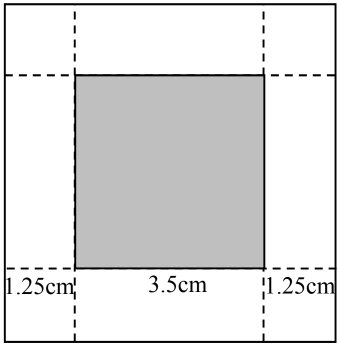


圖 5-26 硬幣恰落在正方形內的概率

故硬幣落下後恰巧落在一個正方形內的概率

$$P(A) = 3.5^2/6^2 = 0.34028\ldots$$。

有些問題表面上與圖形無關，但由於問題中涉及到兩個變量，此時我們可以利用平面直角坐標系作出圖形，採用面積度量的方法加以解決。我們看幾個可轉化爲幾何概型的例子。

【案例 5-14】 某公司甲和乙兩名員工持有對講機，他們對講機的接收範圍爲距離基地 25km 以內。中午 1 時正，員工甲正在基地以東距基地 30km 以內的某地向基地行駛，而員工乙正在基地以北距基地 40km 以內的某地向基地行駛，試問此時他們能够通過對講機交談的概率有多大?

分析：根據情境，不妨用 O 表示基地，則甲在 x 正半軸距離原點 O 爲 30km 的線段上，乙在 y 正半軸距離原點 O 爲 40km 的

線段上，且甲、乙在相應線段上的位置具有任意性，故可視爲滿足等可能條件，因此可以構造幾何概型加以求解。

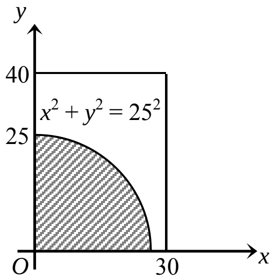


圖 5-27 通過對講機交談的概率

設 x 和 y 分別代表甲和乙距基地 O 的距離，則 $0 \le x \le 30$ 及 $0 \le y \le 40$，且甲、乙所有位置構成的有序點對 (x, y) 形成了 30×40 的矩形，其中每一個點對都代表甲、乙的一個特定位置。而甲、乙能夠用對講機交談條件是“距離基地 25km 以內”，此時，有序點對 (x, y) 必須落在以原點 O 爲圓心，25km 爲半徑的圓內，如圖 5-27 所示。

故中午 1 時正，甲和乙兩人能夠通過對講機交談的概率爲

$$P=\frac{\frac{1}{4}\pi\times 25^2}{30\times 40}=\frac{625\pi}{4800}\approx 0.41\text{。}$$

【案例 5-15】 甲和乙兩人相約於下午 1:00～2:00 之間到某車站乘客車外出。他們到達車站的時間是隨機的，設在 1:00 ～ 2:00 之間有四班客車開出，開車時間分別是 1:15、1:30、1:45 和 2:00。如果約定見車就乘，那麼他們同坐一輛客車的概率是多少？如果約定最多等一輛車，則他們同坐一輛客車的概率又如何？

分析：由於本題涉及到甲和乙兩個維度的時間問題，因此可以化歸爲平面圖形，選用面積的度量進行計算。設甲和乙到站時間分別是 x 和 y，則 $1 \le x \le 2$ 及 $1 \le y \le 2$，即甲和乙到站的所有可能結果構成了一個邊長爲 1 的正方形。由於客車開車的時間恰好把 1:00~2:00 的時間劃分爲四等分，因此，我們把單位正方形的邊長四等分，得到 16 個小正方形區域，如圖 5-28 (a) 所示。

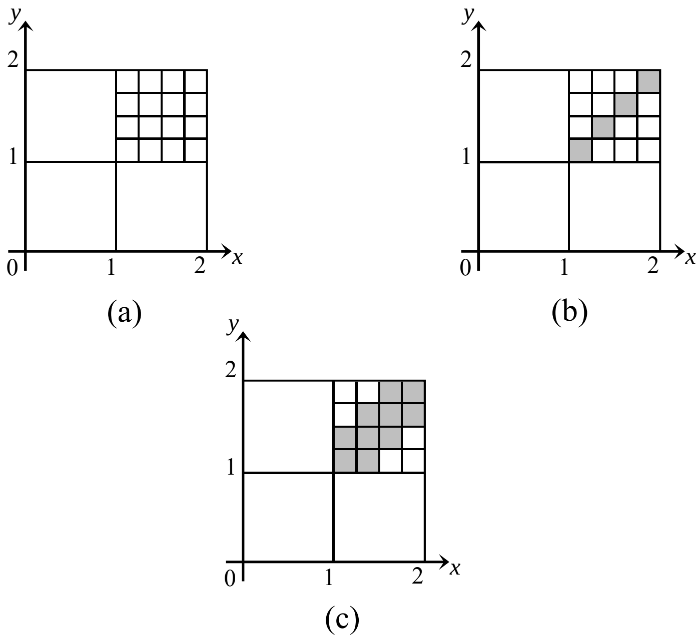


圖 5-28 用面積計算概率

假設甲和乙兩人約定見車就乘。如果甲和乙均在下午 1:00 ~ 1:15 到站，那麼兩人就同坐下午 1:15 出發的客車，用圖形表示就是圖 5-28 (b) 中的左一陰影小正方形；如果甲和乙均在下午 1:15 ~ 1:30（不包括 1:15）到站，那麼兩人就同坐下午 1:30 出發的客車，用圖形表示就是圖 5-28 (b)中的左二陰影小正方

形；依次類推。則滿足條件“見車就乘且同坐一輛客車”的所有可能結果就構成圖 5-28 (b) 中的 4 個陰影小方格。所以，“見車就乘，兩人同坐一輛客車”的概率爲 4/16=1/4。

假設約定最多等一輛車。如果甲和乙均在下午 1:00～1:30 到站，那麼兩人至少也可以同坐下午 1:30 出發的客車，用圖形表示就是圖 5-28 (c) 中的左下四個陰影小正方形構成的中正方形；如果甲和乙均在下午 1:15～1:45(不包括 1:15)到站，那麼兩人至少也可以同坐下午 1:45 出發的客車，用圖形表示就是圖 5-28 (c) 中的中間部分陰影的中正方形；依次類推。則滿足條件“最多等一輛車且同坐一輛客車”的所有可能結果就構成圖 5-28 (c) 中的 10 個黑色小方格。所以，“最多等一輛車且兩人同坐一輛客車”的概率爲 10/16=5/8。

有趣的是，甲和乙兩人同時在下午 1:30 抵達的概率是 0，但這並不表示這一隨機事件不會發生。反之，甲和乙兩人均不在 1:30 抵達的概率是 1，但這並不表示這一隨機事件一定會發生。概率爲 0 的事件有可能發生，而概率爲 1 的事件也可能不發生。

後記：數學知識還只是第一步

在 2009 年香港中文大學學位教育文憑畢業典禮上，主禮嘉賓司徒華先生提到，他剛當小學教師時，被學生的一個問題難倒，這個問題就是："何以分數除法是乘法的顛倒？"

要解答可以有不同層面：

首先，其實這與分數沒有直接關係，任何數的除均是乘的顛倒。比較數學化的解釋［ Shulman（1987）所說的學科知識 —— Subject Knowledge (SK) ］就很簡單了。

首先瞭解甚麼叫"$\div$"？例如 $6 \div 2$，就是要找一個數$\square$，讓

$$\square \times 2 = 6,$$

答案就是 3 了。

現在計算 $6 \div \frac{5}{7}$，也就是要找一個數$\square$，讓$\square \times \frac{5}{7} = 6$，一望而知

$$6 \times \frac{7}{5} \times \frac{5}{7} = 6,$$

故此，這個數$\square$就是 $6 \times \frac{7}{5}$，

也即 $6 \div \frac{5}{7} = 6 \times \frac{7}{5}$。 ——顛倒！

但令人疑惑的是，爲何數學家這麼聰明，在起初想到 $6 \times \frac{7}{5}$

會讓它乘上$\frac{5}{7}$之後會變成 6？於是我們便要進一步的解釋，那這就要動用 Shulman（1987）所說的“學科內容知識”[Pedagogical Content Knowledge (PCK)] 了。

舉例： 一個數 ÷2，就是“把這個數分成兩（等）分”就是

這個數的一半，

就是

這個數的$\frac{1}{2}$，

亦即

這個數 $\times \frac{1}{2}$，

其實這個解釋不完整，它只解釋了 □÷整數 的情況。要解釋

$$\square \div \frac{c}{d} \qquad [\ c,d \text{ 爲（非零正）整數 }]$$

的情況，就要補上解釋

$$\square \div \frac{1}{d}\text{，}$$

這就要用“包含除”的想法

一個數 $\div \frac{1}{2}$，

可考慮較形象化的

一塊餅 $\div \frac{1}{2}$，

即一塊餅，每份$\frac{1}{2}$塊餅，可分成 2 份，故

$$一塊餅 \div \frac{1}{2} = 一塊餅 \times 2。$$

同理，一塊餅 $\div \frac{1}{3}$

即一塊餅，每份$\frac{1}{3}$塊餅，可分成 3 份，故

$$一塊餅 \div \frac{1}{3} = 一塊餅 \times 3。$$

故無論

$$\square \div 整數$$

或

$$\square \div \frac{1}{整數}$$

均是顛倒，以至

$$\square \div \frac{c}{\mathrm{d}}$$

也是乘法的顛倒了。

雖然本書上仍然集中 SK。但我們必須清楚地認識到，對於有效的數學教學，多一點數學並不足够。所謂“數學化”（mathematisation）是一個由具體體驗到抽象形式化的過程，而不是簡單地加入更多的數學內容就可以了。在一段時期，數學教育出現“去數學化”的趨勢，但糾正的方法不是硬生生地把數學塞回去，而是築建起一道由現實生活到數學間的橋梁。

返回序文中“負負得正”一例，就很清楚了。數學老師應該知道其數學底蘊，但我們根本無法將其數學道理解釋給學生。不同書籍中便有不同隱喻與模擬。這些模擬雖然不是絕對的

數學證明，但亦符合一定程度的數學（或物理）的合理性。這就是教數學的難度，亦是只靠 SK 並不足夠。

總的來說，一方面教師要有堅實的 SK，不應只是說這些內容不會直接在課堂上用得着就不去裝備。但與此同時亦要建立 PCK，數學好不就代表教得好，這是再清楚不過的事。教學的過程中，SK、PK（教學知識 —— Pedagogical Knowledge）和 PCK 均是不可或缺的。

我們在序言中提到，要帶出數學的本質，上面亦提到數學化過程，即由學生周遭的數學經歷（所謂生活數學）帶到數學家群體“公認”的數學。但我們可進一步問，是否只存在一種數學？是否有一個“終極”的數學知識？這些仍值得反思的。數學的本質在歷史上是在變化中的，數學家的數學亦隨着“工具”的發展而在改動。以文中函數爲例，函數爲帶序三元組(A，B，G）能否說是在歷史上“現今”或者塵埃落定的定義？或只能說是集合論的定義？《原本》甚至後來的希爾伯特系統是不是幾何的最終參考藍本？用 von Neuman 或 E. Landau（1877-1938）的方式定義自然數和有理數是否就是統一公認的數學定義？

就以自然數爲例，曾幾何時，一些數學家（“直觀論者”）認爲它是無需定義的，它是最原始的直觀。L. Kronecker（1823-1891）的名言，“上帝創造自然數，其他一切都是人工的”。及後，Peano 公理已經帶着“形式論者”的意味，到 von Neuman 就把一切定義在集合論基礎上。Peano 公理變成了可以證明出來的“定理”。同理，實數可以用 Landau 的方式逐步建立起來，但也可以“乾脆”把它“定義”爲序完備帶序域，並證明它是唯一的。不過有趣的是，我們仍要解決是否起

碼存在一個“實數系”。Landau 自有其答案，但這又可帶進何謂“數學存在”（mathematical existence）的問題。

在本書中，一方面，我們想指出，我們不必太崇尚權威，因爲數學界本身對於某些定義式概念也可能有着少許差異（例如 0 是否自然數）。另一方面，正如在序文中所說，我們希望通過這本書，數學老師能用數學觀點（高等數學觀點）回應在課堂上出現的數學學科知識問題。

作者簡介

陳鎮民，受前輩“學好數理化，走遍全天下”思想的影響，1987 年考入華南師範大學數學系，1991 年理學學士畢業，有幸能够分配到廣東省廣州市的一所省重點中學 —— 廣東實驗中學任教。從事中學數學教學整整十五年，得以感受年輕人學習數學的喜樂與困惑，窺探年輕人成長的心路歷程。機緣巧合，2005 年加入到廣州市教育局教學研究室工作，從事教育教學研究事業，有機會可以大量參與到不同類型學校的數學課堂，獲得較多素材，對教與學的心理進行一定的研究。拜讀了黃毅英教授的著作《香港數學教育實地觀察》，收穫良多，參與黃教授主持的本書編寫，才深知以後工作研究的方向 —— 做教師的幫手。

許世紅，現任職廣東省教育研究院。自小住在校園中，秉承母親的衣鉢，填報大學志願時，所有意向都是師範大學數學系。1990 年從華中師範大學畢業，在中學擔任數學教師，從初一升至高三。期間雖然非常享受教書之樂趣，但對教育、教學的困惑卻日益劇增，遂於 1998 年考入華南師範大學，進修數學課程與教學論，獲教育學碩士學位。2001 年投身教研員隊伍，潛心研究在職中學數學教師的培訓與專業發展。由於工作原因，深感自身測量與評價專業知識匱乏，因此於 2008 年再返華南師範大學，進修教育測量與評價，2011 年順利取得博士學位。對在職數學教師培訓、統計與概率的學與教、教育測量與評價興趣濃厚。

張家麟，學數於香港中文大學數學系，先後獲學士、碩士及博士學位。研究興趣爲非線性偏微分方程。曾任職中學教師、香港教育學院及香港中文大學數學系導師，2005 年獲中文大學理學院優秀教學獎。2006 年 7 月任香港教育學院助理教授至今，對數學問題解決以及幾何的教與學很感興趣。

張僑平，湖北武漢人。2002 年畢業於湖北大學數學系，2005 年獲教育學碩士後任教於湖北大學。2007 年赴香港中文大學教育學院攻讀哲學博士，研習數學教育。2010 年 12 月獲教育學哲學博士，並任教於華東師範大學數學系，2012 年 1 月任教於香港中文大學課程與教學學系。對數學教師教育、數學課程改革及學生數學問題解決等較感興趣。

黃毅英，香港中文大學課程與教學學系教授，教育本科課程學科主任，數學教育碩士課程總監，博士生導師。自問並非那些宣稱從小便立志投身教育的人，只是一向對抽象事物懷有濃厚的興趣，又愛整潔，於是被數學吸引過來，故此大學選了數學系。1977 年文學學士畢業，1981 年再獲哲學碩士，主攻拓樸學。機緣巧合，進入教學行列，於中學任教數學整整十年，得以感受年輕人的內心世界，開始探討人學習與成長的奧秘。其間於香港中文大學進修教育，1987 年獲文科教育碩士。1989 年加入香港中文大學，再於香港大學進修，1995 年獲哲學博士學位。由於參與的各種研究項目，亦沒有甚麼名堂自居，只是無拘束地逍遙於不同的學術探索。難拒盛情而先後參與了香港數理教育學會（數學科）和香港數學教育學會的組織工作，得相交不少同道朋友。向不善詞令，唯有靠文字表達心中所想，故此筆耕也有一些，最近一本爲連同一群博士生所

寫的《教授現在告訴你！—— 如何開展教育研究？》。

黃麗珍，2004 年於香港中文大學獲教育學士（數學教育）學位，並於 2010 年取得香港中文大學理學碩士（數學教育）學位，現爲將軍澳某所中學默默耕耘之前線老師。

謝明初，湖南常德人。現任廣東第二師範學院數學系教授、系副主任、應用數學所副所長。曾就讀於常德師範專科學校數學系、湖南師範大學數學系、貴州師範大學數學系、南京大學哲學系，並獲得教育學碩士學位（貴州師範大學）和哲學博士學位（南京大學）。先後任教於中學、中等師範學校、高等師範專科學校、師範學院。研究領域：數學哲學與數學教育。

蘇洪雨，山東汶上人。2000 年畢業於曲阜師範大學數學與計算機系。2000 年考入華南師範大學數學系，2003 年獲數學課程與教學論碩士學位，留校工作。2006 年，到華東師範大學攻讀博士學位，於 2009 年畢業，獲教育學哲學博士學位。現任職於華南師範大學數學科學學院。對數學素養、職前教師教育以及數學探究比較感興趣。

蔡勁航，2002 年畢業於香港中文大學數學系。2003 於香港中文大學取得教育文憑後投身教育界，任職中學教師至今。爲了拓展對數學及教育的認識，於香港中文大學繼續進修並分別於 2007 年及 2010 年，先後取得理學碩士（數學）及教育碩士（主修課程與教學），對數學教育學法及教法課程等方向較感興趣。

參考文獻

白鳥敬（2007）。《生活中有趣的單位與記號》。臺北：世茂出版有限公司。

陳森林（1981）。《中學代數教學法》。武漢：湖北人民出版社。

伍鴻熙（1999）。《小學數學教育研究工作坊》。香港：香港科技大學教育發展組。http://www.edp.ust.hk/previous/math/teaching/2/primary_note.html

吳作樂、吳秉翰（2010）。《想問卻不敢問的數學問題》。臺北：臺灣英文新聞股份有限公司。

張家麟、黃毅英、韓藝詩（2009）。《漫談數學學與教：新高中數學課程必修部分》。香港：課程發展處數學教育組。

梁宗巨（1992）。《數學歷史典故》。瀋陽：遼寧教育出版社。

蕭文強（1990）。《1，2，3，…以外》。廣東：廣東教育出版社。（1992）香港：三聯書店。（1994）臺灣：書林出版有限公司。

蕭文強、林建（1982）。《概率萬花筒》。香港：廣角鏡出版社。

榊忠男（2002）。《愛麗絲與孫悟空的數學之旅》。臺北：國際村文庫書店。

Cajori, F. (1916) . *A history of elementary mathematics*. New York, U.S.A.: Macmillan Company. p.10.

Cajori, F. (1919). *A history of mathematics*. New York, U.S.A.:

Macmillan Company. p.47.

Huff, D. (1973). *How to lie with statistics*. Harmondsworth, UK: Penguin Books. 鄭惟厚（譯）（2005）。《別讓統計數字騙了你》。臺北：天下文化。

Jones, G. E. (2000). *How to lie with charts*. San Jose, U.S.A: Authors Choice Press. 葉偉文（ 譯）（ 2005）。《別讓統計圖表唬弄你》。台北： 天下文化。

Leung, K. T., & Chen, D. L. C. (1970). *Elementary set theory*. Hong Kong: Hong Kong University Press.

Sultan, A., & Arzt, A. F. (2010). *The mathematics that every secondary math teacher needs to know*. New York, U.S.A.: Routledge.

徵引文獻

中文部分（按筆劃序）

中華人民共和國教育部（2001）。《全日制義務教育數學課程標準（實驗）》。北京：人民教育出版社。

中學數學實驗教材編寫組（1982）。《中學數學實驗教材第二冊（上）》。北京：人民教育出版社。頁 2。

王青健（2001）。記數法中的位值思想。《自然辯證法研究》，17 卷 2 期，頁 47-51。

王重民編（1984）。《徐光啟集》。上海：上海古籍出版社。

史寧中等（2005）。中小學統計及其課程教學設計——數學教育熱點問題系列訪談之二。《課程・教材・教法》，6 期，頁 45-50。

許世紅、胡中鋒（2009）。數學試卷分析方法。華東師範大學出版社，頁 79-81。

許世紅、張崇岐（2009）。對初中統計概念與思想方法的認識與教學處理。《中國數學教育》，7-8 期，頁 18-19。

許世紅、張崇岐（2010）。 初中抽樣調查教學中四個基本問題的探討。《中國數學教育》，3 期，頁 17-19。

紀志剛（2003）。從記數法到複數域：數系理論的歷史發展。《上海交通大學學報》（哲學社會科學版），11 卷 6 期，頁 42-47。

華羅庚（1962）。《從祖沖之圓周率談起》。北京：人民教育出版社。

陳鳳潔、黃毅英、蕭文強（1994）。教（學）無止境：數學「學養教師」的成長。載林智中、韓孝述、何萬貫、文綺芬、施敏文（編）。《香港課程改革：新時代的需要研討會論文集》（頁 53-56）。香港：香港中文大學課程與教學學系。增訂版刊于蕭文強（編）（1995）。《香港數學教育的回顧與前瞻—梁鑒添博士榮休文集》（頁 129-137）。香港：香港大學出版社。後又轉載於黃毅英（編）（2005）《迎接新世紀：重新檢視香港數學教育——蕭文強教授榮休文集》（頁 38-45）。香港：香港數學教育學會。

阿波京（И. А. Апокин）、邁斯特羅夫（Л. Е. Майстров）（1984）。《計算器發展史》（Развитие вычислительныу. Машин, 1974）中譯本。上海：上海科技出版社。頁 24。

周瀚光（1997）。《數學史話》。上海：上海古籍出版社。

胡作玄(1984)。《布林巴基學派的興衰》第九章：Bourbaki 的選擇(頁 130-138)。上海：知識出版社。

夏道行（1970）。《π 和 *e*》。香港：商務印書館。

張景中（2009）。《幾何新方法和新體系》。 北京：科學出版社。

張奠宙（2009）。《我親歷的數學教育（1938-2008）》。南京：江蘇教育出版社。

張家麟、黃毅英、林智中（2010）。學校幾何課程的重整——為何教和如何教演繹幾何?《數學傳播》，34 卷第 3 期，頁 13-33。

龔升（1964）。《從劉徽割圓術談起》。北京：人民教育出版社。

梁子傑（2005）。《幾何原本導讀》。臺灣：九章出版社。頁 9-10。

梁子傑、黃毅英、蕭文強(2008)。課程設計上的「古為今用」——以「截距定理」和「中點定理」為例。《數學教育》26 期，頁 3-10。

梁宗巨（1980）。《世界數學簡史》。瀋陽：遼寧人民出版社。

梁宗巨、王青建、孫宏安（2005）。《世界數學通史》（上、下冊）。遼寧教育出版社。

黃毅英（1987）。內插法與高階等差級數的一點注記。《中學數學》，6 期，頁 20。

黃毅英（1992）。習作在統計教學上的效能。《學校數學通訊》11 期，頁 11-21。

黃毅英（1993）。統計圖表誤用。《學校數學通訊》，12 期，頁 1-4。

黃毅英（1996a）。△ABC ≅ △BCA?《數學教育》，2 期，頁

22-24。

黃毅英（1996b）。香港數學教育改革另類報告。《香港數學教育會議-96》研討會專題演講。香港：香港大學，1996 年 12 月 23 日。後載於馮振業（1997）。《香港數學課程改革之路》（頁 141-160）。香港：香港數學教育學會。

黃毅英（2003）。其實「平面幾何」這一課所講的是甚麼？《數學教育》，17 期，頁 43-50。

黃毅英（2004）。其實 「二次方程」這一課所講的是甚麼？《進志數學通訊》，3 月，頁 3-4。

黃毅英（2005a）。最大公因數、最小公倍數要講的是些甚麼？《數學教育》，20 期，頁 70-74。

黃毅英（2005b）。再談「學這些東西幹嗎？」——從 20 多年前一文談起。《數學教育期刊》（*Datum*）42 期，頁 6-12。

黃毅英（2005c）。自然數的歷史。《朗文教育專訊》8 期，頁 6-9。

黃毅英（2005d）。從教學上的考慮「0」。《朗文教育專訊》8 期，頁 10-11。

黃毅英（2006a）。專科專教？「學養教師」！——讀舊文兩則隨想。《朗文教育專訊》11 期，頁 7-11。

黃毅英（2006b）。「老師，用『A 簿』還是用『B 簿』？」。《數學教育》23 期，頁 27-36。

黃毅英（2007）。三次數學危機—個人認知與體會。《中學數學教學研究》。2 期，頁 7-10。

黃毅英（2012）。追尋定義之路。《數學教育》，33 期，3-11。

黃毅英、林智中、孫旭花（2006）。《變式教學課程設計原理：

數學課程改革的可能出路》。香港：香港中文大學教育學院香港教育研究所。

蕭文強（1978）。《為甚麼要學習數學》。香港：學生時代出版社。第二版(1992)：香港新一代文化協會。增訂本(1995)。臺灣：九章出版社。第四章。

蕭文強（1982）。先乘除後加減和先加減後乘除。《數學教學季刊》，3 期，頁 2-3。

蕭文強（1990a）。微積分的故事。載蕭文強（編）《1, 2, 3, … 以外—數學奇趣錄》（頁 25-46）。香港：三聯書店。

蕭文強（1990b）。不用微積分能計算體積嗎？載蕭文強（編）《1, 2, 3, … 以外—數學奇趣錄》（頁 49-75）。香港：三聯書店。

蕭文強（1990c）。從方程到群的故事。載蕭文強（編）《1, 2, 3, … 以外—數學奇趣錄》（頁 94-128）。香港：三聯書店。

蕭文強（1998）。古今中外勾股方圓。《數學教育》，6 期，10-23 頁。

蕭文強、黃毅英（2009）。實驗概率和理論概率的關係—中學數學教學如何受益於大學數學。《數學教育》，27 期，頁 1-8。

韓雪濤（2006）。《數學悖論與三次數學危機》。長沙：湖南教育出版社。

葛量洪（1981）。你知道「直角」和「90°」的分別嗎？。《數學教學季刊》，第 1 期，頁 18。

鮑建生、周超（2009）。《數學學習的心理基礎與過程》。上

海：上海教育出版社。

英文部分（按字母序）

Austin J. D. (1982). Constructions with an unmarked protractor. *Mathematics Teacher, 75*, 291-295.

Austin, J. D., & Austin, K. A. (1979). Constructing and trisecting angles with integer angle measures. *Mathematics Teacher, 72*(4), 290-293.

Bell, E. T. (1937). *Men of mathematics*. New York, U.S.A.: Simon & Schuster.

Berlinghoff, W. P., & Gouvêa, F. Q. (2004). *Math through the ages: A gentle history for teachers and others*. Oxton House Publishers. 洪萬生、英家銘及 HPM 團隊（譯）（2008）《溫柔數學史》。臺北：博雅書屋。

Boag, T., Boberg, C., & Hughes, L. (1979). On Archimedean solids. *The Mathematics Teacher*. May, 371-376.

Bourbaki, N. (1950). The architecture of mathematics. *American Mathematical Monthly, 57*, 221-232. (Authorised translation by A. Dresden of a chapter in F. Le Lionnais (Ed.), *Les grands courants de la pensée mathématique*. Cahiers du Sud, 1948.)

Cajori, F. (1928). *A history of mathematical notations, Vol. I*. Chicago, U.S.A.: Open Court Publishing Company. p. 2.

Cajori, F. (1929). *A history of mathematical notations, Vol. II*. Chicago, U.S.A.: Open Court Publishing Company. p. 146.

California State Board of Education. (1999). *Mathematics framework for California public schools: Kindergarten through grade twelve*. Sacramento, California, U.S.A.: Author. Retrieved 12-06-2010 from the California State Board of Education Website: http://www.cde.ca.gov/cdepress /math.pdf

Crowley, M.L., & Dunn, K.A. (1985). On multiplying negative numbers. *The Mathematics Teacher, April*, 252-256.

David, M. B. (1984). *The history of mathematics*. Allyn and Bacon, inc. p.26.

Debus, A. G. (1918). *World who's who in science*. Chicago, Illinois, U.S.A.: Marquis-Who's Who Inc. p. 1408.

Eves, H. (1964). *An introduction to the history of mathematics (revised edition)*. First edition in 1953. New York, U.S.A.: Holt, Rinehart and Winston.

Fung, C. I., Siu M. K., Wong K. M., & Wong, N. Y. (1998). A dialogue on the teaching of complex numbers and beyond. *Mathematics Teaching*, *164*, 26-31.

Gamow, G. (1988). *One, two, three … infinity: Facts and speculations of science*. New York, U.S.: Dover.

Hart, K. M. (1981). *Children's understanding of mathematics: 11–16*. London, UK: John Murray.

Kuratowski, K.（1962）. *Introduction to set theory and topology*. Oxford: Pergamon Press.

Langrall, C. W., & Swafford, J. O. (1997). *Grade six students' use of equations to describe and represent problem situation*.

Paper presented at the American Educational Research Association. Chicago, Illinois.

Landau, E. (1951). *Foundations of analysis: The arithmetic of whole, rational, irrational, and complex numbers*. Translated by F. Steinhardt. New York: Chelsea.

Leung, K. T. (1974). *Linear algebra and geometry*. Hong Kong: Hong Kong University Press.

Malik, M. A. (1980). Historical and pedagogical aspects of the definition of function. *International Journal of Mathematics Education in Science and Technology, 11*, 489-492.

McGee, M. G. (1979). Human spatial abilities: Psychometric studies and environmental, genetic, hormonal, & neurological influences. *Psychological Bulletin, 86*, 879-918.

Nicholas, C. P. (1966). A dilemma in definition. *The American Mathematical Monthly, 73*, 762-768.

Neugebauer, O. (1957). *The exact sciences in antiquity* (2nd edition). Providence, R.I., U.S.A.: Brown University Press. p17.

Potter, M. H., & Morrey, C. B. (1991). *A first course in real analysis* (2nd edition). New York, U.S.A.: Springer.

Reichmann, W. J. (1975). *Use and abuse of statistics*. London, UK: Chapman & Hall.

Revuz, A. (1971). The position of geometry in mathematical education. *Educational Studies in Mathematics, 4*, 48-52.

Rouse Ball, W. W., & Coxeter, H. S. M. (1892/1987).

Mathematical recreations and essays (13th edition). New York, U.S.A.: Dover Publications.

Russell, B. (1919). *Introduction to mathematical philosophy*. London, UK: Routledge. pp. 1-19.

Shulman, L. S. (1987). Knowledge and teaching: Foundations of the new reform. *Harvard Educational Review, 57*(1), 1-22.

Siu, M. K. (1992). Concept of function — Its history and teaching. In F. Swetz, J. Fauvel, O. Bekken, B. Johansson, & V. Katz (eds.) *Learn From the masters: Proceedings of Workshop on History of Mathematics at Kristiansand in August 1988* (pp. 93-144). Pennsylvania State University.

Siu, M. K., & Siu, F .K. (1979). History of mathematics and its relation to mathematical education. *International Journal of Mathematics Education for Science and Technology, 10*(4), 561–567.

Siu, F. K., & Siu, M. K. (1992). Why is (−) × (−) = (+)? *Curriculum Forum, 2* (2), 47-51.

Thureau-Dangin, F. (1938). *Textes mathématiques babyloniens*. Ex Oriente Lux. Leiden: Brill.

Van der Waerden, B. L. (1966). *Erwachende Wissenschaft*. Basel, Switzerland: Birkhäuser Verlag. p.65.

Van Hiele, P.M., & van Hiele Geldof, D. (1958). A Method of initiation into geometry at secondary school. *Report on Methods of Initiation into Geometry*, J. B. Wolters.

Vilenkin, N. Ya (1968). *Stories about sets*. New York, U.S.A.: Academic Press Inc. 李鐘蓀（譯）（1979）。《集的故事》。

香港：商務印書館。

Walsh, T. R. S. (1972). Characterizing the vertex neighbourhoods of semi-regular polyhedra. *Geometriae Redicata, 1*, 117-123.

Wang, H. (1962). *A survey of mathematical logic*. Beijing, P.R.C.: Science Press.

Wong, N. Y. (1981). What is a real number. *Mathematics Bulletin, 1*, 18-22.

Wong, N. Y. (2005). The positioning of algebraic topics in the Hong Kong elementary school mathematics curriculum. *ZDM - The International Journal on Mathematics Education, 37* (1), 23-33.

Wong, N. Y., Rowland, T., Chan, W. S, Cheung, K. L., & Han, N. S. (2010). The mathematical knowledge of elementary school teachers: A comparative perspective. *Journal of the Korea Society of Mathematical Education Series D: Research in Mathematical Education, 14*(2), 187-207.

Wu, H. (1996). The role of Euclidean geometry in high school. *Journal of Mathematical Behavior, 15*, 221-237.

	數學百子櫃系列	作者
（一）	漫談數學學與教—新高中數學課程必修部分	張家麟、黃毅英、韓藝詩
（二）	漫談數學學與教—新高中數學課程延伸部分單元一	韓藝詩、黃毅英、張家麟
（三）	漫談數學學與教—新高中數學課程延伸部分單元二	黃毅英、張家麟、韓藝詩
（四）	談天說地話數學	梁子傑
（五）	數學的應用：圖像處理—矩陣世紀	陳漢夫
（六）	數學的應用：投資組合及市場效率	楊良河
（七）	數學的應用：基因及蛋白的分析	徐國榮
（八）	概率萬花筒	蕭文強、林建
（九）	數學中年漢的自述	劉松基
（十）	中學生統計創意寫作比賽 2009 作品集	
（十一）	從「微積分簡介」看數學觀與數學教學觀	張家麟、黃毅英
（十二）	2010/11 中學生統計創意寫作比賽作品集	
（十三）	2011/12 中學生統計創意寫作比賽作品集	